

# ONDES ET INSTABILITÉS

## Articles Pédagogiques Multimedia



Olivier THUAL, [thual@imft.fr](mailto:thual@imft.fr)

INP/ENSEEIH et IMFT

Novembre 2009



# Table des matières

<b>I</b>	<b>DES ONDES ET DES FLUIDES</b>	<b>11</b>
<b>II</b>	<b>DES INSTABILITÉS ET DES FLUIDES</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Instabilités de cisaillement</b>	<b>19</b>
1	Modèles prototype 1D . . . . .	24
2	L’instabilité “roll waves” d’un écoulement incliné . . . . .	27
3	Instabilité de Kelvin Helmholtz . . . . .	32
4	Stabilité des écoulements parallèles . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Convection de Rayleigh-Bénard</b>	<b>53</b>
1	Approximation de Boussinesq . . . . .	57
2	Problème de Rayleigh-Bénard . . . . .	60
3	Équations sous formes adimensionnées . . . . .	62
4	Problème de Rayleigh-Bénard bidimensionnel . . . . .	63
5	Conditions aux limites périodiques . . . . .	64
6	Conditions aux limites réalistes . . . . .	68
7	Conditions aux limites en températures fixées . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Bifurcations génériques de l’équilibre</b>	<b>81</b>
1	Bifurcation noeud-col . . . . .	85
2	Bifurcation fourche . . . . .	88

<b>3</b>	Bifurcation de Hopf . . . . .	90
<b>4</b>	Formes normales et catastrophes . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Systèmes dynamiques simples</b>	<b>107</b>
<b>1</b>	Le modèle de Lorenz et les systèmes dissipatifs . . . . .	112
<b>2</b>	Le pendule simple et les systèmes conservatifs . . . . .	120
<b>3</b>	Autres oscillateurs et phénomènes non linéaires . . . . .	124
<b>4</b>	Exploration numérique de système dynamiques . . . . .	130

# ORGANISATION GÉNÉRALE DU COURS

Ce cours du tronc commun “Dynamique des Fluides” du Master Recherche “Dynamique des Fluides, Énergétique et Transferts” (DET), intitulé “ ONDES ET INSTABILITÉS”, répond aux objectifs suivants :

- Manipuler des modèles de base de la mécanique des fluides à travers l’étude des leurs ondes linéaires pour les systèmes conservatifs et de leurs instabilités pour les systèmes dissipatifs forcés. Les principaux phénomènes physiques pris en compte sont les suivants : compressibilité, gradient vertical de densité, cisaillement vertical de vitesse ou encore présence d’une surface libre.
- Assimiler plusieurs concepts de base souvent rencontrés en mécanique des fluides : linéarisation autour d’états stationnaires, recherche de modes propres en tenant compte des symétries du problème, calcul des relations de dispersions généralisées et interprétation physique des champs décomposés sur une base de modes propres.
- Assimiler les concepts de base de la dynamique spatio-temporelles des trains d’ondes : relation de dispersion, vitesse de groupe d’un paquet d’onde, réponse impulsionnelle d’un milieu dispersif.
- Assimiler les concepts de base de la dynamique instabilités temporelles : relations de dispersions généralisées, bifurcations de l’équilibre, instabilités de cisaillement ou thermiques dans les fluides.
- Susciter un intérêt pour certains approfondissements : train d’ondes émis par un obstacle mobile ou oscillant, expression du flux d’énergie ondulatoire et réfraction des ondes, équations d’amplitudes, ...

Le support écrit de ce cours est structuré sous la forme de plusieurs “Articles Pédagogiques Multimedia” indépendants.

Un “Article Pédagogique Multimedia” (APM) est un document électronique qui regroupe des textes de type polycopié mais aussi des animations, des programmes de démonstrations ou des illustrations difficiles à transcrire sous forme papier.

Tous ces APM sont accessibles à l’adresse suivante :

<http://thual.perso.enseeiht.fr/otapm>

Ce cours comporte deux parties décrites ci-dessous.

## PARTIE I : “Des ondes et des fluides”

Cette partie s’appuie sur les cinq “Articles Pédagogiques Multimedia” (APM) suivants :

- **reladi** : Relations de dispersion des ondes dans les fluides
- **paqund** : Dispersion d’un paquet d’ondes 1D
- **emiobs** : Émission d’ondes par un obstacle oscillant ou mobile
- **fluxen** : Flux d’énergie des ondes dans les fluides
- **refrac** : Réfraction des ondes et tracé de rayons

Ces articles peuvent être lus et travaillés indépendamment les uns des autres.

La partie écrite de ces cinq articles font l’objet de l’ouvrage suivant : “Des ondes et des fluides”, O. Thual, Cépaduès-Éditions 2004. La version électronique, qui complète l’ouvrage par des animations ou la photocopie de transparents, est disponible à l’adresse :

<http://thual.perso.enseeiht.fr/otapm>

Les pré-requis nécessaires pour la compréhension de ce cours peuvent être limités à une connaissance de base des équations de la mécanique des fluides. Parmi les très nombreux livres permettant d’acquérir cette connaissance, j’en cite un qui présente l’avantage de partager la plupart des notations utilisées dans cet ouvrage : “Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables”, O. Thual, Cépaduès-Éditions 1997.

## PARTIE II : “Des instabilités et des fluides”

Cette partie s’appuie sur les quatre “Articles Pédagogiques Multimedia” (APM) suivants :

- **cisail** : Instabilités de cisaillement
- **rayben** : Convection de Rayleigh-Bénard
- **bifgen** : Bifurcations génériques de l'équilibre
- **sysdyn** : Systèmes dynamiques simples

Ces articles peuvent être lus et travaillés indépendamment les uns des autres.

La partie écrite de ces quatre articles est contenue dans le présent polycopié. La version électronique, qui complète ce polycopié par des animations ou la photocopie de transparents, est disponible à l'adresse :

<http://thual.perso.enseeiht.fr/otapm>

## SYLLABUS

### ONDES ET INSTABILITÉS

Semestre 1   Cours : 17 h   TD :   Projet :   Crédits :

**Mots-Clés** : ondes sonores, ondes de gravité internes, ondes de surface, relations de dispersion, réfraction, sillage d'onde.

**Bibliographie** : [1] LIGHTILL, "Waves in fluids", Cambridge (1990), [2] DRAZIN et REID, "Hydrodynamics stability", Cambridge (1984), [3] Thual, "Des ondes et des fluides", Cépaduès (2004), [4] Charru, "Instabilités Hydrodynamiques", EDP Sciences (2007).

**Objectif** : Assimiler les concepts généraux sur les ondes et les instabilités tout en manipulant des modèles de base de la mécanique des fluides.

**Programme** : Le cours est repose sur une dizaine "d'Articles Pédagogiques Multimedia" (APM) indépendants regroupés en deux parties.

La partie intitulée "Des ondes et des fluides" comprend cinq APM : (1) dérivation des relations de dispersion des ondes sonores, de gravité interne et de surface, (2) notion de vitesse de groupe à travers l'étude de paquets d'ondes, (3) train d'onde émis par un obstacle oscillant ou mobile, (4) calcul de l'énergie d'une onde monochromatique et de son flux, (5) réfraction des ondes et tracé de rayons.

La partie intitulée "Des instabilités et des fluides" comprend quatre APM : (1) dérivation des relations de dispersion de plusieurs instabilités de cisaillement, (2) calcul du seuil de la convection de Rayleigh-Bénard, (3) dynamique des

bifurcations génériques de l'équilibre, (4) étude d'instabilités pour quelques systèmes dynamiques simples.

Le cours se concentre sur la moitié de ces APM tout en motivant la lecture des autres. Plusieurs exemples d'applications des notions introduites sont abordés sous forme d'exercices.

O. THUAL

## DÉROULEMENT PRATIQUE

- **Cours magistral** : le cours oral proprement dit dure entre 1h30 sans pause.
- **Evaluations** : l'évaluation est effectuée à l'aide d'un examen à la fin du cours. Ce contrôle écrit est individuel. Tous les documents sont autorisés.
- **Documentation du cours** : la documentation du cours est constituée de neuf "Articles Pédagogiques Multimedia" (APM). Chaque APM peut être lu et travaillé indépendamment des autres. Certains exercices et problèmes posés lors d'examens précédents y sont inclus. Ces APM, avec leurs dernières mises à jour, sont disponibles à l'adresse :

<http://thual.perso.enseeiht.fr/otapm>

Ces pages contiennent aussi des animations illustrant le cours et des programmes Matlab à télécharger.

La partie "Des ondes et des fluides" fait l'objet d'un ouvrage publié aux éditions Cépaduès (2004). Le prêt de cet ouvrage peut-être envisagé par l'enseignant. La partie "Des instabilités et des fluides" pourra être distribuée sous forme de polycopié.

- **Travaux des élèves** : certaines notions abordées dans ce cours sont utilisées lors de projets réalisés par les élèves de l'ENSEEIHTE et publiées à l'adresse suivante :

<http://www.enseeiht.fr/travaux>

- **Bibliographie** : prêt dans les bibliothèques de plusieurs établissements des ouvrages de la bibliographie du livre.
- **Fiche d'évaluation du cours** : les étudiants sont invités à remplir une fiche d'évaluation du cours (voir ci-dessous) pour la remettre à l'issue de l'examen final.



## PROGRAMME DÉTAILLÉ DU COURS

Pour l'année 2009-2010, les “Articles Pédagogiques Multimedia” suivants seront exposés lors du cours magistral :

1. **bifgen** : Bifurcations génériques de l'équilibre
2. **reladi** : Relation de dispersion des ondes dans les fluides
3. **rayben** : Convection de Rayleigh-Bénard
4. **paqund** : Dispersion d'un paquet d'ondes 1D
5. **cisail** : Instabilités de cisaillement
6. **refrac** : Réfraction des ondes et tracé de rayons

**FICHE D'ÉVALUATION DU COURS  
ONDES ET INSTABILITÉS**

Afin d'établir un bilan du cours et éventuellement, en fonction de vos réponses, d'envisager des modifications de l'enseignement pour les années suivantes, je vous serais reconnaissant de bien vouloir remplir ce questionnaire et me le transmettre.

Olivier THUAL

**NOM** (facultatif : ) :

Pour chacune des rubriques, portez un croix dans la colonne retenue et commentez votre réponse

	Très Bien	Bien	Moyen	Passable	Mauvais	Commentaires
Définition des objectifs du cours						
Documentation écrite du cours						
Intervention de l'enseignant						
Contrôle des connaissances						
Atteinte des objectifs du cours						

Commentaires supplémentaires :

Partie I

**DES ONDES ET DES  
FLUIDES**



La partie intitulée “DES ONDES ET DES FLUIDES” s’appuie sur les cinq “Articles Pédagogiques Multimedia” (APM) suivants :

- **disper** : Relations de dispersion des ondes dans les fluides
- **paqund** : Dispersion d’un paquet d’ondes 1D
- **emiobs** : Émission d’ondes par un obstacle oscillant ou mobile
- **fluxen** : Flux d’énergie des ondes dans les fluides
- **refrac** : Réfraction des ondes et tracé de rayons

Ces articles peuvent être lus et travaillés indépendamment les uns des autres.

La partie écrite de ces cinq articles font l’objet de l’ouvrage suivant : “Des ondes et des fluides”, O. Thual, Cépaduès-Éditions 2004. La version électronique, qui complète l’ouvrage par des animations ou la photocopie de transparents, est disponible à l’adresse :

<http://thual.perso.enseeiht.fr/otapm>

Les pré-requis nécessaires pour la compréhension de ce cours peuvent être limités à une connaissance de base des équations de la mécanique des fluides. Parmi les très nombreux livres permettant d’acquérir cette connaissance, j’en cite un qui présente l’avantage de partager la plupart des notations utilisées dans cet ouvrage : “Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables”, O. Thual, Cépaduès-Éditions 1997.



## Partie II

# DES INSTABILITÉS ET DES FLUIDES





La partie intitulée “DES INSTABILITÉS ET DES FLUIDES” s’appuie sur les quatre “Articles Pédagogiques Multimedia” (APM) suivants :

- **cisail** : Instabilités de cisaillement
- **rayben** : Convection de Rayleigh-Bénard
- **bifgen** : Bifurcations génériques de l’équilibre
- **sysdyn** : Systèmes dynamiques simples

Ces articles peuvent être lus et travaillés indépendamment les uns des autres.

La partie écrite de ces quatre articles est contenue dans le présent polycopié. La version électronique, qui complète ce polycopié par des animations ou la photocopie de transparents, est disponible à l’adresse :

<http://thual.perso.enseeiht.fr/otapm>



# APM 1

## Instabilités de cisaillement

### FICHE SIGNALÉTIQUE

Article Pédagogique Multimedia (APM)	
Titre :	Instabilités de cisaillement
Auteur :	O. THUAL, INPT/ENSEEIH
Référence :	<i>APM-INPT thu-cisail</i> (2004)
Mois de création :	septembre 2004
Mise à jour :	November 14, 2009
Comité de lecture :	néant
URL multimedia :	<a href="http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/">http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/</a>
Niveau :	Master I ou II
Cours oral :	1h30 à 2h
Animations :	néant
Mots clés :	instabilités, croissance temporelle relations de dispersion généralisées

### OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

L'objectif de cette article pédagogique est de présenter la notion d'instabilité sur les exemples des exemple simples issus de la mécanique des fluides en se limitant aux écoulement cisailés. Plusieurs objectifs de formation sont visés :

- Assimiler la notion de linéarisation autour d'un équilibre.
- Assimiler la notion de relation de dispersion.
- Saisir le sens physique du déclenchement de l'instabilité "roll waves" d'un écoulement à surface libre sur un plan incliné.
- Saisir le sens physique du déclenchement de l'instabilité de Kelvin Helmholtz.

- Assimiler les notions de bases sur la stabilité des écoulements parallèles.

Les compétences à acquérir lors de l'étude de cet article pédagogique sont les suivantes :

- Linéarisation d'un système d'équations aux dérivées partielles autour d'un équilibre.
- Recherche de la forme des modes propres en tenant compte des invariances par translations dans certaines directions d'espace.
- Calcul de la relation de dispersion et des modes propres.
- Discussion de la stabilité en faisant varier un paramètre.

## PRÉ-REQUIS

Le niveau requis pour la lecture de cet article pédagogique se situe autour de celui d'une Licence scientifique.

## NOTATIONS

$a$	Amplitude réelle
$A$	Amplitude complexe
$\underline{A}$	Vecteur complexe
$\underline{A}_i$	Vecteur propre de $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$
$\underline{b} = (b_1, b_2, \dots)$	Vecteur de composantes $b_i$
$B$	Amplitude complexe
$C_f$	Coefficient de frottement
$\mathcal{C}$	Plan complexe
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport à $t$
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à $x$
$\text{div}$	Opérateur divergence
$D$	Opérateur $\frac{d}{dz}$
$\mathcal{D}$	Sous-domaine de l'espace complexe $\mathcal{C}$
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs unitaires de la base canonique
$f(x, y, z, t)$	Fonction quelconque
$F$	Nombre de Froude
$F(\underline{x}, t)$	Équation de la surface libre $F(\underline{x}, t) = 0$
$F_c$	Nombre de Froude critique
$\underline{\mathcal{F}}(\underline{U})$	Opérateur vectoriel, différentiel non linéaire
$g$	Gravité
$g'$	Notation $g' = g \cos \alpha$

$\text{grad}$	Opérateur gradient
$h(x, t)$	Hauteur d'une couche fluide
$h_*$	Grandeur $h$ adimensionnée
$\tilde{h}(x, t)$	Perturbation de $h$
$\tilde{h}_*$	Perturbation $\tilde{h}$ adimensionnée
$h_n$	Constante
$I$	Pente $I = \sin \alpha$
$k_1$	"Vecteur d'onde" 1D ou composante de $\underline{k}$
$\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$	Vecteur d'onde 3D
$k$	Module $ k $ ou norme $\ \underline{k}\ $
$k_*$	Grandeur $k_1$ adimensionnée
$K$	Nombre d'onde $k$ adimensionné
$K$	Notation $K = k_1/C_f$
$\mathcal{L}$	Opérateur différentiel $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$
$\underline{\underline{L}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$	Matrice $n \times n$ des polynômes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
$L_{ij}$	Composante de $\underline{\underline{K}}$
$O(b)$	Du même ordre de grandeur que $b$
$P(\xi)$	Polynôme
$p$	Constante ou paramètre de contrôle
$p(x, t)$	Champ de pression
$p_1, p_2$	Champs de pression dans les couches 1 ou 2
$p_0(z)$	Profil de pression
$p_r$	Pression constante
$R$	Nombre sans dimension
$R_*$	Valeur particulière de $R$
$R_c$	Valeur particulière de $R$
$\mathbb{R}$	Droite des réels
$s$	Valeur propre complexe $s = \sigma - i\omega$
$S$	Notation $S = s/C_f$
$s_i$	Valeurs propres complexes
$t$	Temps
$t_*$	Temps adimensionné
$\tanh$	Tangente hyperbolique
$u(x, t)$	Champ 1D pour un modèle linéaire
$u_0$	Valeur d'équilibre de $u$
$u_m(z)$	Profil complexe
$\tilde{u}$	Perturbation de $u$ autour d'un équilibre
$U(x, t)$	Vitesse moyenne d'une couche fluide
$U_*$	Grandeur $U$ adimensionnée
$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	Champ de vitesse dans les couches 1 ou 2
$U_1, U_2$	Vitesses constantes
$U_0(z)$	Profil de vitesse

$U'_0(z)$	Dérivée première de $U_0(z)$
$U''_0(z)$	Dérivée seconde de $U_0(z)$
$\tilde{U}(x, t)$	Perturbation de $U$
$\tilde{U}_*$	Perturbation $\tilde{U}$ adimensionnée
$U_n$	Constante
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ 3D de dimension $n$
$\underline{U}_0$	Solution stationnaire
$(U_1, U_2, \dots)$	Composantes de $\underline{U}$
$\underline{U}(x, y, z)$	Champ de vitesse 3D
$(u, v, w)$	Composantes de $\underline{U}(x, y, z)$
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Perturbation de $\underline{U}$ autour d'un équilibre
$v$	Vitesse dans la direction $\underline{e}_y$
$v_m(z)$	Profil complexe
$w$	Vitesse dans la direction $\underline{e}_z$
$w_m(z)$	Profil complexe
$w(\underline{x}, t)$	Vitesse verticale
$w_1, w_2$	Vitesses $w$ dans les couches 1 et 2
$x$	Coordonnée sur l'axe $\underline{e}_x$
$x$	Variable d'un système dynamique
$x_*$	Grandeur $x$ adimensionnée
$x$	Partie réelle de $z$
$x_e$	Équilibre d'un système dynamiques
$x_+$	Équilibre particulier
$x_-$	Équilibre particulier
$x(t)$	Trajectoire solution d'un système dynamique
$\underline{X}$	Variables d'un système dynamique
$\underline{X}_e$	Équilibre d'un système dynamiques
$\underline{X}_+$	Équilibre particulier
$\underline{X}_-$	Équilibre particulier
$\underline{X}(t)$	Trajectoire solution d'un système dynamique
$y$	Coordonnée sur l'axe $\underline{e}_y$
$y$	Partie imaginaire de $z$
$y(t)$	Notation pour $-x(t)$
$z$	Coordonnée sur l'axe $\underline{e}_z$
$z = x + i y$	Variable complexe d'un système dynamique
$z(t)$	Trajectoire complexe solution d'un système dynamiques
$ z $	Module de $z$
$\alpha$	Angle d'un plan incliné avec l'horizontale
$\alpha_1, \alpha_3$	Constantes
$\beta$	Constante ou paramètre de contrôle
$\gamma$	Constante
$\delta$	Constante ou paramètre de contrôle

$\Delta$	Opérateur Laplacien
$\Delta$	Discriminant d'une équation du second degré
$\eta(x, y, t)$	Élévation de la surface libre
$\Lambda(z, k_1, k_2)$	Opérateur de dérivation
$\Lambda(z, k_1$	Opérateur $\Lambda(z, k_1, 0)$
$\mu$	Constante
$\mu_0, \mu_2, \mu_4$	Constantes
$\xi$	Variable du polynôme $P(\xi)$
$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	Variables des polynômes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
$\rho$	Module de $z$
$\rho(\underline{x}, t)$	Masse volumique
$\rho_1, \rho_2$	Masses volumiques dans les couches 1 et 2
$\sigma$	Partie réelle de $s$
$\sigma_1, \sigma_2$	Valeur particulières de $\sigma$
$\Sigma(k_1)$	Partie réelle de la relation de dispersion généralisée
$\Sigma_i(\underline{k})$	Partie réelle d'une relation de dispersion généralisée
$\Sigma_+, \Sigma_-$	Parties réelles d'une relation de dispersion généralisée
$\nu$	Viscosité cinématique
$\nu$	Viscosité turbulente
$\phi(\underline{x}, t)$	Potentiel des vitesses
$\phi_1, \phi_2$	Potentiel des vitesses dans les couches 1 et 2
$\Phi_1(z), \Phi_2(z)$	Profils dans les couches 1 et 2
$\omega$	Partie imaginaire de $-s$
$\omega_1, \omega_2$	Valeur particulières de $\sigma$
$\Omega(k_1)$	Partie imaginaire de la relation de dispersion généralisée
$\Omega_i(\underline{k})$	Partie imaginaire d'une relation de dispersion généralisée
$\Omega_+, \Omega_-$	Parties imaginaire d'une relation de dispersion généralisée

## COURS ÉCRIT

### Introduction

On considère ici les modèles d'écoulement les plus simples permettant de mettre en évidence la notion d'instabilité de cisaillement. Dans un premier temps, on présente le concept de linéarisation autour d'une solution stationnaire et de croissance exponentielle d'une petite perturbation sur des exemples d'équations aux dérivées partielles 1D très simples. Le premier exemple d'écoulement physique présenté est alors le modèle des équations de Saint Venant qui décrit la dynamique des ondes de surface d'une couche fluide peu profonde coulant sur un plan incliné. Le deuxième exemple traitable de manière analytique est celui de l'instabilité de Kelvin Helmholtz qui décrit le ci-

saillement de deux couches fluides irrotationnelles, la vorticité étant concentrée à l'interface. Enfin, le problème au valeurs propres permettant de déterminer la stabilité des écoulements parallèles est abordé à travers la dérivation de l'équation d'Orr-Sommerfeld.

## 1 Modèles prototype 1D

Pour introduire les notions d'instabilité, de relations de dispersion ou de modes propres de la manière la plus simple possible, on présentent ici des modèles basés sur des équations aux dérivées partielles unidimensionnelles (1D). Il est fait ici abstraction de l'éventuelle signification physique des solutions, bien qu'il serait possible d'explicit  r des systèmes dont la dynamique se laisse décrire par ces modèles.

### 1.1 Modèle linéaire

Pour introduire le concept d'instabilité, on considère le modèle linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 u + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} . \quad (1.1)$$

En se plaçant dans la cadre d'un domaine infini, on cherche des solutions complexes de la forme

$$u(x, t) = A e^{i k_1 x + s t} = A e^{i k_1 x} e^{\sigma t - i \omega t} \quad (1.2)$$

avec  $A \in \mathbb{C}$ ,  $k_1 \in \mathbb{R}$  et  $s = \sigma - i \omega \in \mathbb{C}$ . La forme de ces solutions est justifiée par le fait que l'équation aux dérivées partielles considérée est invariante par translations d'espace et de temps. On pourrait considérer des solutions plus générale de la forme  $u(x, t) = a \exp(\gamma x + i k_1 x) \exp(\sigma t - i \omega t)$ , pour prendre en compte une croissance spatiale, mais on se restreint ici au cas où les solutions sont bornées à l'infini. Dans la mesure où le modèle est linéaire, les solutions générales sont obtenues en sommant les solutions élémentaires considérées. En particulier, les solutions réelles peuvent s'obtenir en prenant la partie réelle des solutions complexes. Pour pouvoir étendre les notations aux cas 2D ou 3D, on dira que  $k_1 \in \mathbb{R}$  est le "vecteur d'onde" et que sa norme (valeur absolue)  $k = |k_1|$  est le "nombre d'onde".

En reportant la forme des solutions recherchées dans l'équation, on voit que l'on obtient des solutions non triviales ( $A \neq 0$ )    condition que les relations de dispersions généralisées suivantes soient vérifiées :

$$\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2 k_1^2 + \mu_4 k_1^4 \quad \text{et} \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1 k_1 - \alpha_3 k_1^3 . \quad (1.3)$$



Un autre point de vue consiste à écrire le modèle sous la forme  $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$ , où  $\mathcal{L} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  est l'opérateur différentiel qui contient les dérivées spatiales et  $P$  est le polynôme défini par  $P(\xi) = \mu_0 - \alpha_1 \xi + \mu_2 \xi^2 - \alpha_3 \xi^3 + \mu_4 \xi^4$ . Les fonctions  $A e^{i k x}$  sont les “modes propres” de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . On peut écrire

$$\mathcal{L} e^{i k_1 x} = P(i k_1) e^{i k_1 x} = [\Sigma(k_1) - i \Omega(k_1)] e^{i k_1 x}. \quad (1.4)$$

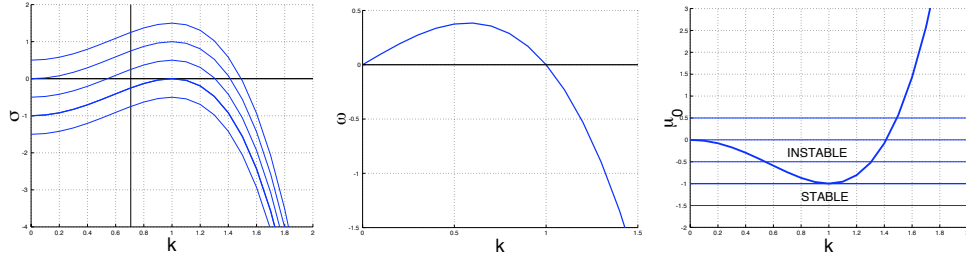


Figure 1.1: *Dispersion et stabilité du modèle prototype dans le cas  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\mu_2 = -2$  et  $\mu_4 = -1$ . a) Taux de croissance  $\sigma = \Sigma(k_1)$  pour  $\mu_0 \in \{-1.5, -1.0, -0.5, 0.0, 0.5\}$ . b) Relation de dispersion  $\omega = \Omega(k_1)$ . c) Seuil d'instabilité  $R_c(k) = -1$  dans la plan  $(k, \mu_0)$ .*

La deuxième relation de l'équation (1.3) (figure 2.2.b) est la relation de dispersion de l'équation de Korteweg de Vries linéaire que l'on obtient dans le cas où les coefficients  $\mu_i$  du modèle sont nuls.

La première relation de l'équation (1.3) (figure 2.2.a) permet de déterminer si les solutions du modèles sont amplifiées ( $\sigma > 0$ ) ou amorties ( $\sigma < 0$ ). On voit que l'on doit supposer  $\mu_4 \leq 0$  pour que les modes de grand nombre d'onde  $k$  (petites périodes spatiales) soient amortis. Dans le cas contraire, le modèle est non seulement “non physique”, mais aussi mal posé sur le plan mathématique. Si  $\mu_4 \leq 0$ , le maximum de  $\Sigma(k_1)$  est atteint pour  $k_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_4}$  et vaut  $\mu_0 - \frac{\mu_2^2}{4\mu_4}$ . On voit alors que lorsque le nombre sans dimension  $R = \frac{4\mu_0\mu_4}{\mu_2^2}$  est inférieur à la valeur critique  $R_c = -1$ , tous les modes sont stables. Lorsque  $R$  est supérieur a cette valeur critique, les modes sont instables pour un intervalle finie de nombre d'onde  $k_1$ , le mode le plus instable correspond à la valeur critique  $k_c \sqrt{-\frac{\mu_4}{\mu_2}}$ .

## 1.2 Linéarisation autour d'un équilibre

On considère le modèle non linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u - \gamma u^3 + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (1.5)$$

avec  $u(x, t) \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\mu_2 > 0$  et  $\mu_4 < 0$ . Pour  $\mu > 0$ , on remarque l'existence des deux solutions stationnaires symétriques  $u_+ = u_0$  et  $u_- = -u_0$  avec  $u_0 = \sqrt{\mu/\gamma}$ . On s'intéresse à la stabilité temporelle de l'équilibre  $u_+ = u_0$  au regard des petites perturbations. Pour cela, on pose

$$u(x, t) = u_0 + \tilde{u}(x, t) \quad (1.6)$$

et l'on s'intéresse à l'évolution des perturbations  $\tilde{u}(x, t)$  que l'on peut choisir petites à un instant initial donné. En reportant dans l'équation du modèle on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = & \left( \mu - 3\gamma u_0^2 \right) \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} \\ & - \gamma \left[ 3u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3 \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Tant que la perturbation  $\tilde{u}(x, t)$  reste petite, on peut négliger les termes "non linéaires"  $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$  et  $[3u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3]$  devant les termes linéaires. En posant  $\mu_0 = \mu - 3\gamma u_0^2 = -2\mu$ , le système "linéarisé autour de l'équilibre  $u_0$ " s'écrit donc

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \mu_0 \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4}. \quad (1.8)$$

On retrouve le modèle linéaire étudié dans le paragraphe précédent à condition de poser  $\alpha_1 = u_0$  et  $\alpha_3 = 0$ .

### 1.3 Calcul de stabilité dans le cas général

Pour généraliser le concept de stabilité temporelle d'un équilibre au cas 3D, on considère le modèle général

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{U}) \quad (1.9)$$

où  $\underline{U}(\underline{x}, t) = (U_1, U_2, \dots, U_n) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur dans un espace de dimension  $n$ ,  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur des coordonnées spatiales et  $\underline{\mathcal{F}}$  est un opérateur non linéaire faisant intervenir les dérivées spatiales  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  des composantes de  $\underline{U}$ .

On suppose que l'état constant  $\underline{U}_0$  est un équilibre du modèle, c'est-à-dire qu'il vérifie  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{U}_0) = \underline{0}$ . On pose alors  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}_0 + \tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t)$  et l'on suppose que  $\tilde{\underline{U}}$  est une perturbation initialement petite. En reportant dans le modèle on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} = \underline{L} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tilde{\underline{U}} + O(\|\tilde{\underline{U}}\|^2), \quad (1.10)$$

où  $\underline{L}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  est une matrice  $n \times n$  dont les composantes  $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sont des polynômes et  $O(\|\tilde{\underline{U}}\|^2)$  est un terme négligeable tant que la perturbation est petite.

On cherche alors des solutions du système linéarisée  $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{U} = \underline{L} \tilde{U}$  sous la forme

$$\tilde{U}(\underline{x}, t) = \underline{A} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} + s t} \quad (1.11)$$

où  $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$  est appelé le “vecteur d'ondes” et  $\underline{A}$  est une amplitude complexe constante. On obtient alors

$$s \underline{A} = \underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3) \underline{A}. \quad (1.12)$$

Les solutions non nulles sont obtenues en choisissant  $s$ ,  $\underline{k}$  et  $\underline{A}$  de telle sorte que  $\underline{A}$  soit un vecteur propre de la matrice  $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$ . La valeur propre est alors  $s$  et on dit que la solution ainsi trouvée est un “mode propre”.

Dans le cas où  $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$  est une matrice  $(n \times n)$  diagonalisable, cette recherche de valeurs propres et vecteurs propres conduit à  $n$  relations de dispersion généralisées de la forme

$$\sigma_i = \Sigma_i(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \omega_i = \Omega_i(\underline{k}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

Les vecteurs propres  $\underline{A}_i$  associés, solutions de  $\underline{L} \underline{A}_i = s_i \underline{A}_i$  sont les amplitudes complexes des modes propres  $\underline{A}_i \exp(i \underline{k} \cdot \underline{x})$  qui engendrent des solutions dont le comportement temporel est donné par la fonction  $e^{s_i t} = e^{\sigma_i t - i \omega_i t}$ .

On en déduit que  $\sigma_i = \Sigma_i(\underline{k})$  est négatif pour les  $i = 1, \dots, n$  et tous les vecteurs d'ondes  $\underline{k}$  considérés, le système linéaire est stable et, par conséquent, l'équilibre  $\underline{U}_0$  autour duquel le modèle a été linéarisé. En revanche, il suffit qu'il existe une valeur propre  $s_i$  dont la partie réelle  $\sigma_i$  est positive pour une bande, même petite, de vecteurs d'ondes  $\underline{k}$ , pour que l'équilibre considéré soit instable.

## 2 L'instabilité “roll waves” d'un écoulement incliné

L'écoulement d'une lame d'eau dont l'épaisseur est faible devant l'échelle horizontale des phénomènes que l'on observe est modélisée par les équations de Saint Venant (shallow water). Dans le cas d'un écoulement gravitaire sur un plan incliné, on observe une instabilité de la surface libre lorsque la pente dépasse un seuil critique. Cette instabilité porte le nom de “roll waves” du nom des structures en forme de rouleaux qui se forment à la surface libre. Nous limitons ici l'étude au calcul de seuil de déclenchement de l'instabilité dans le cas le plus simple.

### 2.1 Modèle des équations de Saint Venant

On considère un écoulement à surface libre sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On note  $g$  la gravité.

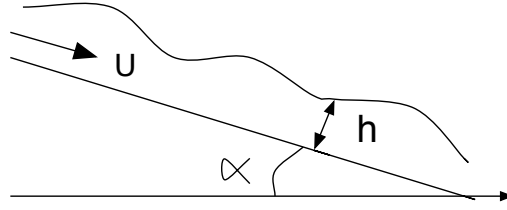


Figure 1.2: Écoulement à surface libre d'une lame d'eau d'épaisseur  $h$  et de vitesse moyenne  $U$  sur un plan incliné.

Dans le cadre de “l'approximation des eaux peu profondes”, le modèle décrivant l'écoulement est celui des équations de Saint Venant qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} &= -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) &= 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $U(x, t)$  est la vitesse moyenne de la couche fluide,  $h(x, t)$  sa hauteur,  $g' = g \cos \alpha$  la projection de la gravité sur la normale au fond et  $I = \sin \alpha$  le sinus de l'angle d'inclinaison, proche de la pente lorsque celle-ci est petite. Le nombre sans dimension  $C_f$  modélise le frottement du fond sur la couche. On suppose ici que  $C_f$  est constant.

Les solutions stationnaires  $(U_n, h_n)$  de ce modèle sont solutions de l'équation

$$U_n = \sqrt{\frac{2g'}{C_f}} \sqrt{I} h_n^{\frac{1}{2}}. \quad (1.15)$$

Il existe donc une famille à un paramètre de solutions stationnaires que l'on appelle “écoulements normaux” en hydraulique.

On cherche à déterminer la stabilité de ces équilibres. On pose alors

$$U(x, t) = U_n + \tilde{U}(x, t) \quad \text{et} \quad h(x, t) = h_n + \tilde{h}(x, t). \quad (1.16)$$

En reportant dans le modèle et en négligeant les termes d'ordre 2, on obtient le système linéarisé suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= -g' \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + C_f \left( \frac{U_n}{h_n} \tilde{U} - \frac{U_n^2}{2 h_n^2} \tilde{h} \right) \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

On cherche alors des solutions sous la forme

$$(\tilde{U}, \tilde{h}) = (A, B) e^{i k_1 x + s t} \quad (1.18)$$

où  $A$  et  $B$  sont de amplitudes complexes, et  $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$ . En reportant dans les équations, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} s + i k_1 U_n + C_f \frac{U_n}{h_n} & g' i k_1 - C_f \frac{U_n^2}{2 h_n^2} \\ i k_1 h_n & s + i k_1 U_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

On obtient des solutions non triviales à condition que le déterminant de la matrice  $2 \times 2$  soit nul, ce qui conduit à la relation de dispersion généralisée suivante :

$$\left( s + i k_1 U_n + C_f \frac{U_n}{h_n} \right) (s + i k_1 U_n) - i k_1 g' h_n \left( g' i k_1 - C_f \frac{U_n^2}{2 h_n^2} \right) = 0. \quad (1.20)$$

La stabilité des équilibres  $(U_n, h_n)$  s'obtient en trouvant les racines complexes  $s_1$  et  $s_2$  de ce polynôme de degré deux pour chaque valeur de  $k_1$ , dont on déduit les relations de dispersion généralisées

$$\sigma_1 = \Sigma_1(k_1), \quad \omega_1 = \Omega_1(k_1) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \Sigma_2(k_1), \quad \omega_2 = \Omega_2(k_1). \quad (1.21)$$

A priori, la stabilité dépend des quatre paramètres  $(h_n, g', I, C_f)$ , la vitesse  $U_n$  y étant reliée. L'analyse dimensionnelle permet de réduire la dépendance à deux paramètres sans dimensions, dans la mesure où les unités de longueur et de temps retirent deux paramètres. Nous allons retrouver ce résultat dans le paragraphe suivant en écrivant le modèle sous une forme adimensionnée. Nous allons ensuite montrer que la structure particulière des équations fait qu'il n'y a en fait qu'un seul nombre sans dimension à considérer.

## 2.2 Équations adimensionnées

Pour étudier la stabilité d'un écoulement stationnaire  $(U_n, h_n)$  on choisit d'adimensionner les grandeurs de la manière suivante

$$\begin{aligned} x &= h_n x_*, & t &= \frac{h_n}{U_n} t_* \\ U(x, t) &= U_n U_*(x_*, t_*), & h(x, t) &= h_n h_*(x_*, t_*), \end{aligned} \quad (1.22)$$

où  $(x_*, t_*, U_*, h_*)$  sont des grandeurs sans dimensions. En reportant ce changement de variables dans les équations on obtient le système adimensionné suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_*}{\partial t_*} + U_* \frac{\partial U_*}{\partial x_*} &= -\frac{1}{F^2} \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2} C_f \left( 1 - \frac{U_*^2}{h_*} \right) \\ \frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} (U_* h_*) &= 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

où  $F = \frac{U_n}{\sqrt{g' h_n}} = \sqrt{\frac{2I}{C_f}}$  est le “nombre de Froude”. Pour ces équations adimensionnées, l'équilibre considéré est  $(U_*, h_*) = (1, 1)$ .

On étudie sa stabilité en posant

$$U_*(x_*, t_*) = 1 + \tilde{U}_*(x_*, t_*) \quad \text{et} \quad h_*(x_*, t_*) = 1 + \tilde{h}_*(x_*, t_*) \quad (1.24)$$

et en cherchant l'évolution des perturbations sous la forme

$$(\tilde{U}_*, \tilde{h}_*) = (A_*, B_*) e^{i k_* x_* + s_* t_*} . \quad (1.25)$$

La stabilité de l'équilibre  $(U_*, h_*) = (1, 1)$  s'obtient en annulant le déterminant de l'opérateur linéarisé, ce qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} s_* + i k_* + C_f & \frac{1}{F^2} i k_* - \frac{1}{2} C_f \\ i k_* & s_* + i k_* \end{vmatrix} = (s_* + i k_* + C_f)(s_* + i k_*) - i k_* \left( \frac{1}{F^2} i k_* - \frac{1}{2} C_f \right) = 0 . \quad (1.26)$$

On pose  $S = s_*/C_f$  et  $K = k_*/C_f$ . Avec ces notations, la relation de dispersion généralisée s'écrit

$$(S + i K + 1)(S + i K) + \frac{1}{F^2} K^2 + \frac{1}{2} i K = 0 . \quad (1.27)$$

On voit que le paramètre  $C_f$  ne joue aucun rôle dans la détermination du seuil d'instabilité.

### 2.3 Calcul de stabilité

La stabilité de l'équilibre ne dépend donc plus que du nombre de Froude  $F$ . En posant  $Y = S + i K$  pour simplifier la recherche des racines de cette équation du second degré, on se ramène à

$$Y^2 + Y + \frac{1}{F^2} K^2 + \frac{1}{2} i K = 0 . \quad (1.28)$$

Les solutions s'écrivent

$$Y_1(K) = \frac{1}{2} \left( -1 + \Delta^{\frac{1}{2}} \right) \quad \text{et} \quad Y_2(K) = \frac{1}{2} \left( -1 - \Delta^{\frac{1}{2}} \right) \\ \text{avec} \quad \Delta = \left( 1 - 2 i K - \frac{4}{F^2} K^2 \right) , \quad (1.29)$$

la convention utilisée pour prendre la racine du discriminant complexe  $\Delta \in \mathcal{C}$  étant indifférente dans la mesure où l'on s'intéresse aux deux solutions.

En posant  $S = \Sigma(K) - i \Omega(K) = -i K + Y(K)$ , on peut tracer sur la figure 1.5 les relations de dispersions généralisées  $\Sigma_-(K)$  et  $\Sigma_+(K)$  pour la partie

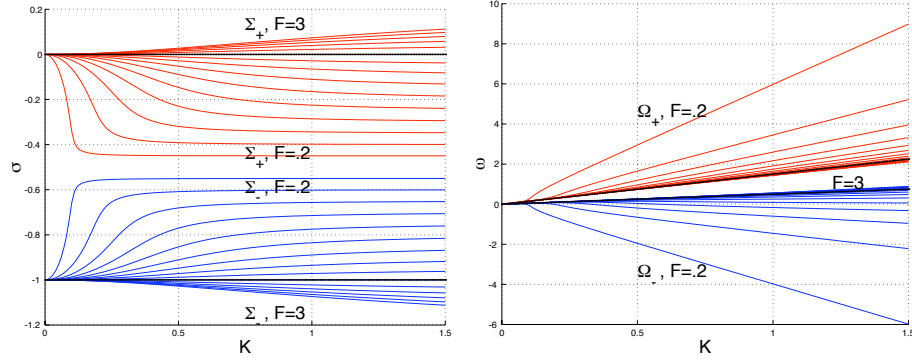


Figure 1.3: Relations de dispersion généralisées pour les nombres de Froude  $F = .2 : .2 : 3$ . a)  $\Sigma_+(K)$  et  $\Sigma_-(K)$ . b)  $\Omega_+(K)$  et  $\Omega_-(K)$ .

réelle et  $\Omega_-(K)$  et  $\Omega_+(K)$  pour la partie imaginaire, en adoptant la convention  $\Sigma_-(K) < \Sigma_+(K)$ .

En effectuant des développements limités, on obtient les comportements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned} \text{Pour } K \rightarrow 0 : \quad \Sigma_+(K) &\sim \frac{K^2}{4} (F^2 - 4) , & \Sigma_-(K) &\sim -1 - \frac{K^2}{4} (F^2 - 4) \\ \Omega_+(K) &\sim \frac{3}{2} K , & \Omega_-(K) &\sim \frac{1}{2} K \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } K \rightarrow \infty : \quad \Sigma_+(K) &\rightarrow \frac{1}{4}(F - 2) , & \Sigma_-(K) &\rightarrow -1 - \frac{1}{4}(F - 2) \\ \Omega_+(K) &\sim \left(1 + \frac{1}{F}\right) K , & \Omega_-(K) &\sim \left(1 - \frac{1}{F}\right) K \end{aligned} \quad (1.31)$$

Sur le tracé des courbes, on remarque que la courbe  $\Sigma_-(K)$  est toujours négative tandis que la courbe  $\Sigma_+(K)$  est négative pour les nombres petits et positive, au moins pour certaines valeurs de  $K$ , pour  $F$  assez grand. Pour le Froude critique  $F = F_c = 2$ , on remarque que les racines  $Y$  sont solutions de l'équation

$$Y^2 + Y + \frac{1}{4} K^2 + \frac{1}{2} i K = \left(Y + i \frac{1}{2} K\right) \left[Y + \left(1 - i \frac{1}{2} K\right)\right] = 0 \quad (1.32)$$

Pour  $F = 2$ , on a donc

$$\Sigma_+(K) = 0, \quad \Omega_+(K) = \frac{3}{2} K \quad \text{et} \quad \Sigma_-(K) = -1, \quad \Omega_-(K) = \frac{1}{2} K . \quad (1.33)$$

On montre alors que  $\Sigma_+(K) < 0$  pour  $F < 2$  et  $\Sigma_+(K) > 0$  pour  $F > 2$ . Le seuil d'instabilité est donc  $F = F_c = 2$ . Tous les modes deviennent instables

au seuil. Au seuil, la vitesse de phase des ondes est  $C_+(K) = \Omega_+(K)/K = \frac{3}{2}$  et  $C_-(K) = \Omega_-(K)/K = \frac{1}{2}$ . En revenant aux grandeurs dimensionnelles, ces vitesses sont donc  $\frac{3}{2}U_n$  et  $\frac{1}{2}U_n$ . On remarque que ces ondes sont non dispersives (vitesse de phase  $\omega/k$  constante) au seuil  $F = F_c = 2$ , alors que les modes stables ou instables sont dispersifs (quoique seulement légèrement dès que  $k$  est suffisamment grand).



Figure 1.4: Mise en évidence expérimentale de roll waves.

Les modes instables que l'on voit apparaître pour  $F > F_c = 2$  sont des structures périodiques que l'on appelle "roll-waves". A priori, tous les modes de toutes les longueurs d'ondes deviennent simultanément instables pour  $F = 2$ , les modes de petites longueurs d'ondes ( $k$  grand) étant les plus instables. Cette situation n'est pas physique et il faut prendre en compte, dans un modèle plus complet, les effets de dissipation d'énergie à petite échelle. Un exemple de modélisation des petites échelles, souvent turbulentes, consiste à ajouter un terme en  $\nu_e \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  dans le second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement,  $\nu_e$  étant une viscosité turbulente que l'on peut, par exemple, supposer constante. La saturation de l'instabilité s'effectue par la formation de ressauts (chocs) dont l'épaisseur est contrôlée par la valeur de la viscosité. Ces considérations ne sont pas développées ici.

### 3 Instabilité de Kelvin Helmholtz

Lorsque deux couches fluides de vitesses et/ou de masses volumiques différentes sont mises en contact, on observe, pour certaines valeurs des paramètres, le développement d'une instabilité. Ce phénomène est appelé, de manière générique "instabilité de Kelvin Helmholtz". Plus spécifiquement, cette dénomination se rapporte à la situation idéalisée de l'interface de deux fluides parfaits individuellement homogènes.

#### 3.1 Équations d'Euler incompressible avec interface

On considère deux couches fluides semi-infinies séparées par une surface libre. On suppose que les fluides sont parfaits et incompressibles et on note  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les masses volumiques des fluides respectivement situés en bas et en haut. On suppose que les fluides sont parfaits, si bien que leur dynamique est modélisée



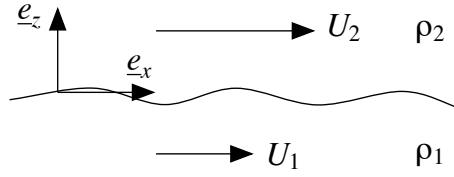


Figure 1.5: Couches fluides superposées de vitesses  $U$  et de masses volumiques  $\rho$  différentes.

par les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_1 &= 0 & \text{et} & & \rho_1 \frac{d}{dt} \underline{U}_1 &= -\operatorname{grad} p_1 - \rho_1 g \underline{e}_z \\ \operatorname{div} \underline{U}_2 &= 0 & \text{et} & & \rho_2 \frac{d}{dt} \underline{U}_2 &= -\operatorname{grad} p_2 - \rho_2 g \underline{e}_z \end{aligned} \quad (1.34)$$

où  $\underline{U}_1(x, t) = (u_1, v_1, w_1)$  et  $\underline{U}_2(x, t) = (u_2, v_2, w_2)$  sont les champs de vitesse et  $p_1(x, t)$  et  $p_2(x, t)$  les champs de pression. Le vecteur unitaire  $\underline{e}_z$  est vertical et  $g$  est l'intensité de la gravité. La notation  $\frac{d}{dt}$  désigne la dérivée particulière  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad}$  pour le fluide du bas et  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad}$  pour le fluide du haut.

On suppose que l'on a les conditions aux limites

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \underline{U}_1 = U_1 \underline{e}_x \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x \quad (1.35)$$

où  $\underline{e}_x$  est un vecteur unitaire horizontal.

Les conditions aux limites à l'interface des deux fluides sont

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \eta = w_1, \quad p_1 = p_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \eta = w_2 \quad (1.36)$$

sur la surface libre d'équation  $F(x, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ . L'élévation de la surface libre est donc  $\eta(x, y, t)$ . Les deux conditions cinématiques  $\frac{dF}{dt} = w_1 - \frac{d\eta}{dt} = w_2 - \frac{d\eta}{dt} = 0$  s'obtiennent en prenant la dérivée particulière de la fonction  $F(x, t) = 0$ . La condition dynamique  $p_1 = p_2$  s'obtient en assurant la continuité des efforts de contact et en négligeant donc l'effet de tension superficielle.

On suppose que l'écoulement est irrotationnel dans chacune des couches fluides ( $\operatorname{rot} \underline{U}_1 = \operatorname{rot} \underline{U}_2 = \underline{0}$ ), ce qui permet d'écrire les champ de vitesses sous la forme

$$\underline{U}_1 = U_1 x + \operatorname{grad} \phi_1 \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = U_2 x + \operatorname{grad} \phi_2. \quad (1.37)$$

Le système d'équations s'écrit alors

$$\Delta \phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{grad} \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \phi_1)^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + g z \right] = \underline{0}$$

$$\Delta\phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[ \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + g z \right] = \underline{0} .$$

avec les conditions aux limites

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \underline{\text{grad}} \phi_1 = \underline{0} \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{\text{grad}} \phi_2 = \underline{0} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad p_1 = p_2 \quad \text{en } z = \eta .$$

Comme  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont respectivement définis à une “constante” (en espace)  $C_1(t)$  et  $C_2(t)$  près, on peut choisir une pression de référence  $p_r$  arbitraire permettant d’éliminer la pression en écrivant

$$\begin{aligned} p_1 &= p_r - \rho_1 \left[ \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + g z \right] \\ p_2 &= p_r - \rho_2 \left[ \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + g z \right] \end{aligned} \quad (1.38)$$

### 3.2 Linéarisation autour de l’équilibre

On s’intéresse à l’état de base  $\underline{U}_1 = U_1 \underline{e}_x$ ,  $\underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x$  et  $\eta = 0$ . La pression est alors  $p_0(z) = p_r - \rho_1 g z$  pour  $z \leq 0$  et  $p_0(z) = p_r - \rho_2 g z$  pour  $z \geq 0$  où  $p_r$  est une pression de référence arbitraire qui peut être choisie suffisamment grande pour éviter des pressions négatives dans une grande partie de la couche du haut qui est, en pratique, d’extension finie (mais grande).

On linéarise alors autour de cet état de base en posant  $p_1 = p_0(z) + \tilde{p}_1$ . La linéarisation conduit à négliger les termes non linéaires dans les équations mais aussi à remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile d’équation  $z = \eta(x, y, t)$  par des conditions aux limites sur la surface fixe d’équation  $z = 0$ . En effet, pour un champ quelconque  $f(x, y, z, t)$  on peut écrire

$$f[x, y, \eta(x, y, t), t] = f(x, y, 0, t) [1 + O(\eta)] . \quad (1.39)$$

Le modèle est alors constitué de l’équation de Laplace  $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 0$  dans le fluide avec les conditions aux limites :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \underline{\text{grad}} \phi_1 = \underline{0} \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{\text{grad}} \phi_2 = \underline{0} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial\phi_1}{\partial z}, \quad p_1 = p_2, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 .$$

En remplaçant la pression par sa valeur et en linéarisant on remplace la condition  $p_1 = p_2$  par la condition aux limites

$$\rho_1 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 + g \eta \right] = \rho_2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] \quad \text{en } z = 0 . \quad (1.40)$$

Dans la mesure où le problème est invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions sous la forme

$$(\phi_1, \eta, \phi_2) = [\Phi_1(z), A, \Phi_2(z)] e^{ik_1 x + ik_2 y + st} . \quad (1.41)$$

On note ici  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ . Le problème à résoudre est donc

$$\begin{aligned} \Phi_1'' - k^2 \Phi_1 &= 0 \quad \text{et} \quad \Phi_2'' - k^2 \Phi_2 = 0 \quad \text{avec} \\ (s + i k_1 U_1) A &= \Phi_1'(0) \quad \text{et} \quad (s + i k_1 U_2) A = \Phi_2'(0) \\ \rho_1 [(s + i k_1 U_1) \Phi_1(0) + g A] &= \rho_2 [(s + i k_1 U_2) \Phi_2(0) + g A] \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi_1'(z) &= 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi_2'(z) = 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

On en déduit  $\Phi_1(z) = A_1 e^{kz}$  et  $\Phi_2(z) = A_2 e^{-kz}$  avec

$$\begin{aligned} (s + i k_1 U_1) A &= A_1 k \quad \text{et} \quad (s + i k_1 U_2) A = -A_2 k \\ \rho_1 [(s + i k_1 U_1) A_1 + g A] &= \rho_2 [(s + i k_1 U_2) A_2 + g A] \end{aligned} \quad (1.43)$$

En reportant les valeurs de  $A_1$  et  $A_2$  en fonction de  $A$  et en simplifiant par  $A$  on obtient la relation de dispersion généralisée

$$\rho_1 [gk + (s + i k_1 U_1)^2] = \rho_2 [gk - (s + i k_1 U_2)^2] . \quad (1.44)$$

En résolvant cette équation de second degré, on obtient deux branches de solutions que l'on peut noter

$$[\Sigma_1(k_1, k_2), \Omega_1(k_1, k_2)] \quad \text{et} \quad [\Sigma_2(k_1, k_2), \Omega_2(k_1, k_2)] . \quad (1.45)$$

### 3.3 Calcul de stabilité dans deux cas particuliers

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit instable est

$$g \sqrt{k_1^2 + k_2^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_1^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 . \quad (1.46)$$

Il suffit, par exemple, de poser  $X = is$  dans (1.44) et de calculer le discriminant de l'équation du second degré en  $X$  ainsi obtenue. On voit donc l'écoulement est instable pour que  $U_1 \neq U_2$  et que les modes de petites de longueur d'ondes (grands  $k$ ) sont les plus instables. Une modélisation plus physique consiste alors à prendre en compte la viscosité qui a pour effet de dissiper l'énergie et aux petites échelles.

Plutôt que d'étudier de manière systématique tous les cas possibles, nous présentons ici quelques cas particuliers. Pour simplifier, on s'intéresse aux écoulements 2D, ce qui revient à poser  $k_2 = 0$ . On a donc  $k = |k_1|$ . En utilisant la symétrie du fait que le problème est réel, on peut alors n'étudier que le cas des vecteurs d'ondes  $k_1 > 0$ .

Un premier cas particulier consiste à supposer que  $\rho_1 = \rho_2$ . Le fluide est homogène et l'instabilité ne provient que du cisaillement des vitesses. La relation de dispersion généralisée s'écrit alors

$$(s + i k_1 U_1)^2 + (s + i k_1 U_2)^2 = 0 . \quad (1.47)$$

On en déduit les deux branches de modes suivants

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_1 - U_2), & \Omega_1(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_1 + U_2) \\ \Sigma_2(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_2 - U_1), & \Omega_2(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_1 + U_2) \end{aligned} \quad (1.48)$$

On voit que ces deux modes se propagent à la vitesse de phase  $c = (U_1 + U_2)/2$  qui est la vitesse moyenne des deux couches fluides. L'un des deux modes est instable dès que  $U_1 \neq U_2$  tandis que l'autre est stable.

Un deuxième cas particulier consiste à supposer que  $U_1 = U_2$ . En se plaçant dans le repère qui se déplace à cette vitesse commune, on peut se ramener au cas  $U_1 = U_2 = 0$ . La relation de dispersion généralisée s'écrit alors

$$\rho_1 (g k + s^2) = \rho_2 (g k - s^2) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} g k . \quad (1.49)$$

Si  $\rho_1$  est plus grand que  $\rho_2$  les deux racines  $s_1$  et  $s_2$  sont imaginaires pure et le système est marginal. Les ondes qui se développent à l'interface des deux fluides sont des ondes de gravité internes. Si  $\rho_2$  est plus grand que  $\rho_1$ , c'est-à-dire si le fluide du haut est le plus lourd, il existe une famille des modes instables dont le taux de croissance croît avec  $k$ . Il faut alors enrichir le modèle avec des termes de dissipation qui vont stabiliser les très petites échelles et sélectionner l'échelle des ondes instables.

## 4 Stabilité des écoulements parallèles

On s'intéresse ici à la stabilité des écoulements plans parallèles dont les vecteurs vitesse pointent dans une même direction et varient dans une direction orthogonale. Les instabilités de cisaillement ainsi obtenues permettent d'expliquer de nombreux phénomènes de transition de la mécanique des fluides.

### 4.1 Équations d'Orr-Sommerfeld

On se place dans le cadre des écoulements de fluide visqueux incompressibles qui sont décrits par les équations de Navier-Stokes

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U} \quad (1.50)$$

où  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}(x, y, z, t) = (u, v, w)$  est le champ de vitesse,  $\rho_0$  la masse volumique constante,  $p$  la pression et  $\nu$  la viscosité cinématique. On suppose que l'écoulement est compris entre les plans  $z = z_1$  et  $z = z_2$ , les bornes  $z_1$  et  $z_2$  étant éventuellement infinies dans le cas de domaines non bornés. Dans le cas visqueux ( $\nu \neq 0$ ), on impose les conditions aux limites  $\underline{U} = U_1 \underline{e}_x$  en  $z = z_1$  et  $\underline{U} = U_2 \underline{e}_x$  en  $z = z_2$ . Dans le cas inviscide ( $\nu = 0$ ), seules les conditions aux limites cinématique  $w = 0$  en  $z = z_1$  et  $z = z_2$  subsistent.

On s'intéresse aux solutions particulières de la forme  $\underline{U} = U_0(z) \underline{e}_x$ , où  $U_0(z)$  est un profil de vitesse ne dépendant que de  $z$  et  $\underline{e}_x$  un vecteur perpendiculaire à  $\underline{e}_z$ . On appelle "écoulement parallèle" une telle solution stationnaire dans la mesure où les trajectoires et les lignes de champ de la vitesse (confondues dans le cas stationnaire) sont des droites parallèles (à  $\underline{e}_x$ ).

En reportant cette forme de solution dans les équations de Navier-Stokes, la loi de conservation de la masse  $\text{div } \underline{U} = 0$  est automatiquement satisfaite et la loi de conservation de la quantité de mouvement entraîne  $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \nu U_0''(z)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  et  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ , où  $U_0''$  désigne la dérivée seconde de  $U_0(z)$ .

Lorsque la viscosité moléculaire  $\nu$  est négligeable, les équations s'écrivent  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ , ce qui implique que  $p = p_{\text{ref}}$  est une constante. Aucune contrainte n'est imposée pour la vitesse si bien que tous les profils  $U_0(z)$ , de formes quelconques, sont solutions.

Dans le cas où l'écoulement est visqueux, les équations entraînent  $\frac{\partial p}{\partial x} = G$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$  et  $G = \rho_0 \nu U_0''(z)$ , où  $G$  est une constante arbitraire. On en déduit que  $p = p_0(x)$  avec  $p_0(x) = p_{\text{ref}} + G x$ , où  $p_{\text{ref}}$  est une constante arbitraire, et  $U_0(z) = \frac{G}{2\rho_0\nu} z^2 + b z + c$  où  $b$  et  $c$  sont des constantes arbitraires ou bien déterminées par d'éventuelles conditions aux limites.

Pour étudier la stabilité de ces écoulements parallèles, on pose

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = U_0(z) \underline{e}_x + \tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad p(\underline{x}, t) = p_0(x) + \tilde{p}(\underline{x}, t) \quad (1.51)$$

et l'on suppose que  $\tilde{\underline{U}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  et  $\tilde{p}$  sont des petites perturbations. En

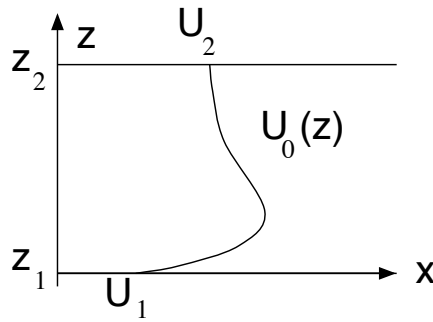


Figure 1.6: Écoulement parallèle.

reportant dans les équations et en ne retenant que les termes linéaires, on obtient :

$$\operatorname{div} \tilde{\underline{U}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} + U_0(z) \frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial x} \underline{e}_x + \tilde{w} U'_0(z) \underline{e}_x = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \tilde{p} + \nu \Delta \tilde{\underline{U}}. \quad (1.52)$$

Compte-tenu de l'invariance de ce système linéaire vis-à-vis des translations en temps et dans les direction  $x$  et  $y$ , on cherche des solutions sous la forme

$$[\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t), \tilde{p}(\underline{x}, t)] = [\tilde{\underline{U}}_m(z), p_m(z)] e^{i k_1 x + i k_2 y + s t} \quad (1.53)$$

avec  $\underline{U}_m = (u_m, v_m, w_m)$  et  $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$ . En reportant cette forme de solutions dans le modèles linéarisé, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} s + \Lambda(z, k_1, k_2) & 0 & U'_0(z) & \frac{1}{\rho_0} i k_1 \\ 0 & s + \Lambda(z, k_1, k_2) & 0 & \frac{1}{\rho_0} i k_2 \\ 0 & 0 & s + \Lambda(z, k_1, k_2) & -\frac{1}{\rho_0} D \\ i k_1 & i k_2 & D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

avec  $\Lambda(z, k_1, k_2) = i k_1 U_0(z) + \nu(D^2 - k_H^2)$ ,  $k_H^2 = k_1^2 + k_2^2$  et  $D = \frac{d}{dz}$ .

Les modes instables, s'ils existent, sont ceux pour lesquels la valeur propre  $s$  admet une partie réelle positive. Le théorème de Squire indique que pour tout mode instable tridimensionnel (3D), il existe un mode bidimensionnel (2D) dans le plan  $(x, z)$  qui est encore plus instable. Ce théorème se démontre en effectuant la transformation de Squire qui consiste à remplacer  $k_H$  par  $k_1$ ,  $k_1 \tilde{u} + k_2 \tilde{v}$  par  $k_1 \tilde{v}_1$  et  $k_H \tilde{p}$  par  $k_1 \tilde{p}$  pour passer du cas 3D au cas 2D. Nous l'admettrons ici pour nous concentrer sur les perturbations 2D de la forme

$$[\tilde{\underline{U}}(x, z, t), p(x, z, t)] = [u_m(z), v_m(z), p_m(z)] e^{i k_1 x + s t} \quad (1.55)$$

qui vérifient donc les équations

$$\begin{aligned} [s + \Lambda(z, k_1)] u_m + U'_0(z) w_m + \frac{1}{\rho_0} i k_1 p_m &= 0 \\ [s + \Lambda(z, k_1)] w_m + \frac{1}{\rho_0} D p_m &= 0 \quad \text{et} \quad i k_1 u_m + D w_m = 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

avec  $\Lambda(z, k_1) = i k_1 U_0(z) + \nu(D^2 - k_1^2)$ . En éliminant  $p_m$  et  $u_m$  de ce système, on obtient finalement l'équation d'Orr-Sommerfeld qui s'écrit

$$\left[ s + i k_1 U_0(z) - \nu(D^2 - k_1^2) \right] (D^2 - k_1^2) w_m = U_0''(z) w_m. \quad (1.57)$$

Les quatres conditions aux limites  $u_m(z_1) = u_m(z_2) = w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$  sur les deux parois planes ou à l'infini conduisent aux quatres conditions  $w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$  et  $w'_m(z_1) = w'_m(z_2) = 0$  pour cette équation différentielle ordinaire de degré quatre en  $z$ .

Pour un vecteur d'onde donné  $k_1$ , ce système n'admet de solutions triviales que pour un ensemble discret de valeurs propres  $s_n(k_1)$  si le domaine est borné ou pour un ensemble discret de valeurs propres  $s_n(k_1)$  combinée à un spectre continu  $s \in \mathcal{D}(k_1)$  où  $\mathcal{D}(k_1)$  est une courbe ou une surface dans le plan complexe  $\mathcal{C}$ . La détermination des valeurs propres et vecteurs propres associés à un écoulement parallèle  $U_0(z)$  est un problème difficile et l'on a souvent recours à l'outil numérique pour le résoudre. En principe, seuls les profils  $U_0(z)$  de forme paraboliques peuvent être considérés dans le cas visqueux. En pratique, on étudie l'équation d'Orr-Sommerfeld des profils  $U_0(z)$  de formes quelconques c'est-à-dire pour la classe des solutions des équations de Navier-Stokes inviscides (équations d'Euler). Cette approximation revient à négliger le terme de dissipation visqueuse  $\nu U_0''(z)$  dans la mesure où il modifie la forme de  $U_0(z)$  sur des échelles de temps longues par rapport au temps caractéristique de croissance des instabilités.

#### 4.2 Théorème du point d'inflexion dans le cas inviscide

Dans le cas inviscide  $\nu = 0$ , les équations de Navier-Stokes sont appelées "équations d'Euler" et l'équation d'Orr-Sommerfeld est appelée "l'équation de Rayleigh" qui s'écrit

$$[s + i k_1 U_0(z)] (D^2 - k_1^2) w_m = U_0''(z) w_m . \quad (1.58)$$

Les quatre conditions aux limites sur le profil  $w_m(z)$  de l'équation d'Orr-Sommerfeld se réduisent aux deux conditions  $w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$ , dans la mesure où le nombre de conditions aux limites est réduit lorsque l'on passe des équations de Navier-Stokes aux équations d'Euler. Par exemple, une condition d'adhérence à la paroi  $\underline{U} = \underline{0}$  pour le cas des équations de Navier-Stokes se réduit à une condition cinématique  $w = 0$  lorsque l'on prend la limite  $\nu = 0$  des équations d'Euler.

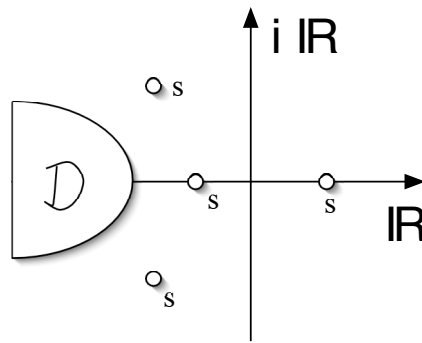


Figure 1.7: Spectre de l'opérateur dans le plan complexe.

Comme on l'a déjà indiqué, tous les écoulements parallèles  $U_0(z) \underline{e}_x$  sont solutions dans le cas inviscide, de manière exacte. Un théorème, démontré par Rayleigh en 1880, indique qu'une condition nécessaire pour qu'un écoulement parallèle soit instable est l'existence d'un point d'inflexion dans le profil  $U_0(z)$ . Pour obtenir ce résultat, il suffit de multiplier l'équation de Rayleigh par  $w_m^*(z)$ , le complexe conjugué de  $w_m(z)$ . En intégrant l'équation ainsi obtenue sur le domaine compris entre les plans  $z = z_1$  et  $z = z_2$ , on obtient :

$$\int_{z_1}^{z_2} w_m^* (D^2 - k_1^2) w_m dz = i k_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z) |w_m|^2}{s + i k_1 U_0(z)} dz . \quad (1.59)$$

En intégrant par parties le terme  $w_m^* D w_m$  et en utilisant les conditions aux limites  $w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$ , on obtient

$$\int_{z_1}^{z_2} (|D w_m|^2 + k_1^2 |w_m|^2) dz + i k_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z) |w_m|^2}{s + i k_1 U_0(z)} dz = 0 \quad (1.60)$$

dont la partie imaginaire est

$$\sigma k_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z) |w_m|^2}{|s + i k_1 U_0(z)|^2} dz \quad (1.61)$$

avec  $s = \sigma - i\omega$ . On voit que si  $U_0''(z)$  ne change pas de signe, c'est-à-dire si  $U_0(z)$  n'admet pas de point d'inflexion, l'intégrale de cette équation est non nulle. On a donc  $\sigma = 0$ , ce qui interdit toute instabilité.

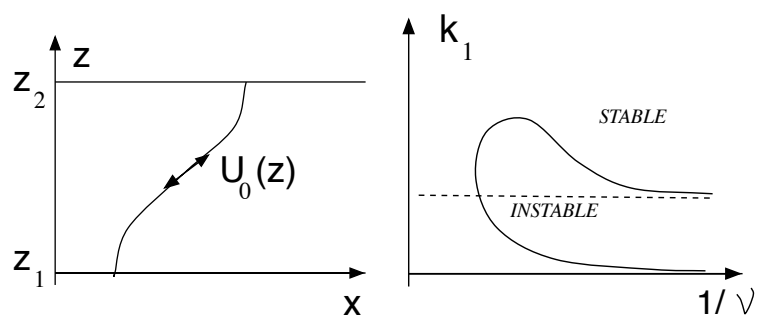
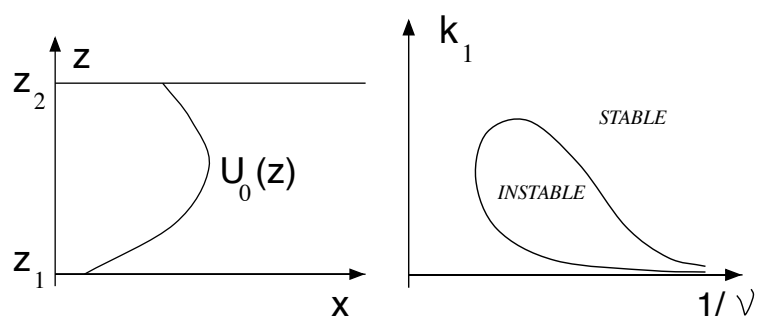
L'existence d'un point d'inflexion dans le profil  $U_0(z)$  est une condition nécessaire mais non suffisante pour l'existence d'une instabilité. En effet, il faut non seulement que  $\sigma$  soit non nul, mais aussi positif pour certaines valeurs de  $k_1$  si l'on doit observer des modes instables.

### 4.3 Instabilités visqueuses

Dans le cas général  $\nu \neq 0$ , l'équation d'Orr-Sommerfeld permet de trouver les valeurs propres  $s \in \mathcal{C}$  et, éventuellement, le spectre continu  $s \in \mathcal{D} \cup \mathcal{C}$  pour un vecteur d'onde  $k_1$  donnée. On rappelle que l'on considère la stabilité de profils  $U_0(z)$  de formes quelconques, même si, en principe, seules les profils paraboliques sont des solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Cette approche est rendue possible en négligeant le terme de viscosité pour l'évolution du mouvement moyen cette viscosité étant néanmoins présente dans l'équation de Orr-Sommerfeld.

Nous nous contentons ici d'indiquer schématiquement l'allure des frontières de stabilité dans un plan  $(\frac{1}{\nu}, k_1)$  pour différentes formes de profils  $U_0(z)$ . L'étude approfondie des solutions de l'équation d'Orr-Sommerfeld est un problème assez difficile qui fait l'objet de plusieurs monographies citées en référence.



Figure 1.8: *Seuil d'instabilité pour un profil avec point d'inflexion*Figure 1.9: *Seuil d'instabilité pour un profil sans point d'inflexion*

La figure 1.8 présente l'allure schématique de la frontière entre les régimes stables et instable dans le plan  $(\frac{1}{\nu}, k_1)$  dans le cas où le profil  $U_0(z)$  admet un point d'inflexion. On voit que dans la limite  $\nu \rightarrow zero$  il existe un intervalle de vecteurs d'ondes  $k_1$  pour lesquels certains modes sont instables.

La figure 1.9 représente schématiquement le cas où  $U_0(z)$  n'admet pas de point d'inflexion. Comme prédit par le théorème du point d'inflexion, l'écoulement est stable dans la limite  $\nu \rightarrow 0$ . C'est donc la viscosité qui est responsable de l'instabilité observée pour des  $\nu$  non négligeables. Le mécanisme physique responsable de cette instabilité visqueuse est assez subtil et n'est pas explicité ici. En gros, la présence de viscosité induit un déphasage dans la direction  $x$  des composantes périodiques du champ de vitesse, ce qui conduit à des mécanismes amplificateurs de la perturbation.

Pour conclure, on peut évoquer le cas de l'écoulement de Couette qui est caractérisé par un profil linéaire, c'est-à-dire à la frontière entre les profils avec ou sans points d'inflexions. L'étude de stabilité linéaire montre qu'il n'existe aucun mode instable pour cet écoulement. Les instabilités observées dans la réalité sont due à des perturbations d'amplitudes finies, et donc à des effets non-linéaires, ce qui sort du cadre de la présente étude.

## Conclusion

Les quatre exemples qui ont été abordé ont permis de détailler le calcul de la relation de dispersion généralisée de modèles linéaires ou linéarisé autour d'un équilibre. Les modèles prototypes 1D ont permis de ramener la recherche des branches de valeurs propres, paramétrées par le vecteur d'onde  $k_1$ , à la recherche des racines d'un polynôme. L'instabilité des rolls-waves pour les équations de Saint Venant, qui se déclenche pour un nombre de Froude égale à deux, a permis de voir les limitations du modèle lorsque la dissipation visqueuse des petites échelles est négligée et que celles-ci sont les plus instables. L'étude de la stabilité des écoulements parallèles a permis de montrer que l'existence d'un point d'inflexion dans le profil influence fortement la nature des instabilités. On peut voir l'instabilité de Kevlin-Helmoltz comme un cas limite d'un écoulement parallèle admettant un point d'inflexion.

Pour les quatre exemples, on remarque que les modèles sont invariants par translations en temps et en espace dans la direction  $x$ . Ces invariances expliquent pourquoi l'on a recherché les modes propres à l'aide de fonction  $\exp(i k_1 x + s t)$ . Lorsque le système n'est pas invariant par translation en  $z$ , comme c'est le cas pour l'instabilité des écoulements parallèles, la forme des modes propres doit être trouvée en appliquant des conditions aux limites.

On aurait pu aussi chercher des solutions sous la forme  $\exp(\gamma x + i k_1 x + i \omega t)$ , ou encore  $\exp(\gamma x + i k_1 x + \sigma t + i \omega t)$  pour prendre en compte des amplifications en espace. Cette approche de la théorie des instabilités n'a pas

été abordée ici, mais fait partie des outils important pour aller plus loin dans la compréhension des phénomènes réalistes en particulier pour les écoulements ouverts, comme par exemple les écoulements parallèles.

## FORMULAIRE

### MODÈLES 1D

#### Modèle linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 u + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} .$$

$$\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2 k_1^2 + \mu_4 k_1^4 \quad \text{et} \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1 k_1 - \alpha_3 k_1^3$$

#### Linéarisation autour d'un équilibre

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u - \gamma u^3 + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \mu_0 \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4}$$

#### Calcul de stabilité

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{U}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \underline{\tilde{U}}}{\partial t} = \underline{L} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \underline{\tilde{U}}$$

$$\underline{\tilde{U}}(\underline{x}, t) = \underline{A} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} + s t} \quad \Longrightarrow \quad s \underline{A} = \underline{L}(i k_1, i k_2, i k_3) \underline{A}$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_i = \Sigma_i(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \omega_i = \Omega_i(\underline{k}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

### INSTABILITÉ “ROLL WAVES”

#### Modèle de Saint Venant

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} - g I - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) = 0$$

Linéarisation autour de  $(h_n, U_n)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= -g' \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + C_f \left( \frac{U_n}{h_n} \tilde{U} - \frac{U_n^2}{2 h_n^2} \tilde{h} \right) \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

#### Équations adimensionnées

$$\frac{\partial U_*}{\partial t} + U_* \frac{\partial U_*}{\partial x} = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial h_*}{\partial x} + \frac{1}{2} C_f \left( 1 - \frac{U_*^2}{h_*} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_* h_*) = 0 ,$$

#### Calcul de stabilité

$$(S + i K + 1)(S + i K) + \frac{1}{F^2} K^2 + \frac{1}{2} i K = 0$$

Instable pour tout  $K$  dès que  $F > 2$ .

# INSTABILITÉ DE KELVIN HELMOLTZ

## Équations d'Euler avec interface

$$\operatorname{div} \underline{U}_i = 0 \quad \text{et} \quad \rho_i \frac{d}{dt} \underline{U}_i = -\underline{\operatorname{grad}} p_i - \rho_i g \underline{e}_z \quad \text{pour } i = 1, 2$$

Conditions aux limites à l'interface

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\operatorname{grad}} \eta = w_1, \quad p_1 = p_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\operatorname{grad}} \eta = w_2$$

## Linéarisation autour de l'équilibre

$$\underline{U}_i = U_i x + \underline{\operatorname{grad}} \phi_i \quad \text{et} \quad \Delta \phi_i = 0$$

avec les conditions aux limites

$$\rho_1 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 + g \eta \right] = \rho_2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] \quad \text{en } z = 0.$$

## Calcul de stabilité

$$\rho_1 \left[ g k + (s + i k_1 U_1)^2 \right] = \rho_2 \left[ g k - (s + i k_1 U_2)^2 \right].$$

Cas  $\rho_1 = \rho_2$  :  $(s + i k_1 U_1)^2 + (s + i k_1 U_2)^2 = 0$

Cas  $U_1 = U_2 = 0$  :  $s^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} g k$

# STABILITÉ DES ÉCOULEMENTS PARALLÈLES

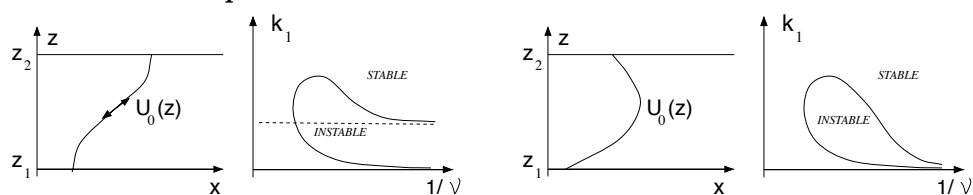
## Équation d'Orr-Sommerfeld

$$\left[ s + i k_1 U_0(z) - \nu (D^2 - k_1^2) \right] (D^2 - k_1^2) w_m = U_0''(z) w_m.$$

## Théorème du point d'inflexion

Une condition nécessaire pour que  $U_0(z)$  soit instable est l'existence d'un point d'inflexion.

## Instabilités visqueuses



## EXERCICES ET PROBLÈMES

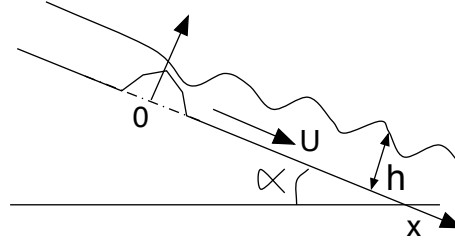
**EXERCICE 1.1** Obstacle immergé et roll-waves

Figure 1.10: Écoulement à surface libre sur un plan incliné

On considère un écoulement peu profond à surface libre sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale dans un champ de gravité d'intensité  $g$ . On suppose que cet écoulement est unidimensionnel (1D) et on note  $U(x, t)$  la vitesse moyennée dans un plan transverse à l'écoulement et  $h(x, t)$  la hauteur de la surface libre dans ce plan. On note  $I = \sin \alpha$  et  $g' = g \cos \alpha$ .

**Modèle d'onde cinématique**

On considère tout d'abord le modèle dans lequel la vitesse  $U$  est reliée à la hauteur  $h$  par la relation  $U = K \sqrt{I} h^{\frac{2}{3}}$  où  $K$  est une constante.

- 1) Écrire la loi de conservation de la masse sous la forme d'une équation aux dérivées partielles ne faisant intervenir que la hauteur  $h(x, t)$ .
- 2) On s'intéresse aux petites perturbations  $\tilde{h}(x, t)$  autour de la solution stationnaire  $h_n$  en posant  $h = h_n + \tilde{h}$ . Écrire l'équation linéarisée régissant la dynamique de  $\tilde{h}$ .
- 3) Justifier la recherche de solutions complexes sous la forme :  
 $\tilde{h} = B \exp(i k_1 x - i \omega t)$  où  $B \in \mathcal{C}$ .
- 4) Tracer la relation de dispersion en adoptant la convention  $\omega \geq 0$ .
- 5) Comparer les vitesses de phase et de groupe des ondes à la vitesse  $U_n$  de l'écoulement.
- 6) En  $x = 0$ , on fait osciller à la pulsation  $\omega_0$  un obstacle immergé dans l'écoulement. Décrire et dessiner le train d'ondes résultant de cette oscillation dans le cadre du modèle proposé.
- 7) À quelle vitesse se propagent les ondes émises par l'obstacle ? Comparer avec la vitesse des particules fluides.

### Modèle de Saint-Venant

On considère maintenant le modèle des équations de Saint-Venant dans l'approximation des pentes faibles qui s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) = 0. \quad (1.62)$$

- 8) On s'intéresse aux petites perturbations  $\tilde{U}(x, t)$  et  $\tilde{h}(x, t)$  autour de la solution stationnaire  $(U_n, h_n) \in \mathbb{R}_+^2$  en posant  $U = U_n + \tilde{U}$  et  $h = h_n + \tilde{h}$ . Écrire les équations linéarisées régissant la dynamique de  $\tilde{U}$  et  $\tilde{h}$ .
- 9) Justifier la recherche de solutions complexes sous la forme :  
 $(\tilde{U}, \tilde{h}) = (A, B) \exp(i k_1 x - i \omega t)$  où  $(A, B) \in \mathcal{C}^2$ .
- 10) Tracer les relations de dispersion des ondes en adoptant la convention  $\omega \geq 0$ . Discuter le tracé en fonction du nombre de Froude  $F = U_n / \sqrt{g h_n}$ .
- 11) En  $x = 0$ , on fait osciller à la pulsation  $\omega_0$  un obstacle immergé dans l'écoulement. Décrire et dessiner les trains d'ondes résultant de cette oscillation dans le cadre du modèle proposé.

### Modèle des “roll-waves”

On considère maintenant le modèle des équations de Saint-Venant avec frottement turbulent qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} &= -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{1}{2} C_f(h) \frac{U |U|}{h} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) &= 0, \end{aligned} \quad (1.63)$$

et on suppose que le coefficient de frottement est modélisé par une loi de la forme  $C_f(h) = D h^{-\beta}$  avec  $D > 0$  et  $\beta \geq 0$ .

- 12) On s'intéresse aux petites perturbations  $\tilde{U}(x, t)$  et  $\tilde{h}(x, t)$  autour de la solution stationnaire  $(U_n, h_n) \in \mathbb{R}_+^2$  en posant  $U = U_n + \tilde{U}$  et  $h = h_n + \tilde{h}$ . Écrire les équations linéarisées régissant la dynamique de  $\tilde{U}$  et  $\tilde{h}$ .
- 13) Justifier la recherche de solutions complexes sous la forme :  
 $(\tilde{U}, \tilde{h}) = (A, B) \exp(i k_1 x + s t)$  avec  $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$  et  $(A, B) \in \mathcal{C}^2$ .
- 14) Écrire, par exemple à l'aide de grandeurs adimensionnées, la relation de dispersion généralisée régissant la stabilité de la solution stationnaire  $(U_n, h_n)$ . On pourra noter  $d = D h_n^{-\beta}$  et  $F = U_n / \sqrt{g h_n}$ .
- 15) On observe l'apparition du seuil d'instabilité lorsque  $F \geq 1.5$ . En déduire la valeur de l'exposant  $\beta$ .
- 16) On règle  $U_n$  et  $h_n$  pour se placer dans le cas marginal  $F = 1.5$  et l'on fait osciller, en  $x = 0$  et à la pulsation  $\omega_0$  un obstacle immergé dans

l'écoulement. Décrire et dessiner les trains d'ondes résultant de cette oscillation dans le cadre du modèle proposé.

Corrigé page 48

## CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

### Corrigé 1.1 Obstacle immergé et roll-waves

#### Modèle d'onde cinématique

**1)** La loi de conservation de la masse s'écrit  $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{5}{3}U(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$  où  $U$  dépend de  $h$  comme indiqué. **2)** L'équation linéarisée autour de  $h_n$  s'écrit  $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{5}{3}U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ , avec  $U_n = U(h_n)$ . **3)** L'équation linéaire étant invariante par translation dans l'espace et le temps, on peut chercher des solutions sous forme d'exponentielles. On anticipe qu'il n'y aura ni amplification ni amortissement des ondes (le calcul le confirmerait). **4)** La relation de dispersion  $\omega = \Omega(k_1) = \frac{5}{3}U_n k_1$  n'est définie que pour  $k_1 \geq 0$  avec la convention  $\omega \geq 0$ . Son tracé est donc formé d'une demi-droite. **5)** On a,  $c_\varphi = c_g = \frac{5}{3}U_n$ . Le milieu n'est pas dispersif. **6)** Seule l'onde vérifiant  $k_1 = k_0$  avec  $k_0 = \frac{3}{5}\omega_0/U_n$  est émise dans le sillage lointain. Ce sillage est uniquement observé dans la région  $x > 0$  dans la mesure où la vitesse de groupe est positive. **7)** Ces ondes, situées en aval de l'écoulement, se propagent à une vitesse  $5U_n/3$  qui est donc plus grande que la vitesse  $U_n$  de l'écoulement moyen.

#### Modèle de Saint-Venant

**8)** Les équations linéarisées s'écrivent  $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + g' \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ . **9)** Les équations sont invariantes par translation en espace et en temps. **10)** Le système s'écrit 
$$\begin{pmatrix} -i\omega + U_n i k_1 & g' i k_1 \\ i k_1 h_n & -i\omega + U_n i k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \underline{0}.$$
 En annulant le déterminant, on obtient la relation de dispersion  $(\omega - k_1 U_n)^2 = g' h_n k_1$ . Avec la convention  $\omega \geq 0$  et en posant  $c_n = \sqrt{g' h_n}$ , on obtient les relations  $\omega = (U_n - c_n)k_1$  et  $\omega = (U_n + c_n)k_1$  respectivement définies pour  $k_1 \leq 0$  et  $k_1 \geq 0$  lorsque  $F < 1$  et pour  $k_1 \geq 0$  seulement pour  $F > 1$ . Les tracés de ces relations de dispersion sont des demi-droites. **11)** Pour  $F < 1$ , on observe une onde de vecteur d'onde  $k_1 = \omega_0/(U_n + c_n)$  se propageant vers la droite à une vitesse  $c_\varphi = c_g = U_n + c_n$ , et une onde de vecteur d'onde  $k_1 = \omega_0/(U_n - c_n)$  qui remonte le courant à la vitesse  $U_n - c_n < 0$ . Pour  $F > 1$ , ces deux ondes se propagent vers l'aval.



**Modèle des “roll-waves”**

**12)** Le système s'écrit  $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + g' \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + D h_n^{-(1+\beta)} U_n - \frac{1+\beta}{2} D h_n^{-(2+\beta)} U_n^2 = 0$  et  $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ . **13)** L'invariance par translations et le souhait de borner les solutions à l'infin conduit à cette forme de solutions élémentaires. **14)** En posant  $x = h_n x_*$ ,  $t = \frac{h_n}{U_n} t_*$ ,  $U(x, t) = U_n U_*(x_*, t_*)$  et  $h(x, t) = h_n h_*(x_*, t_*)$ , on obtient le système  $\frac{\partial U_*}{\partial t_*} + U_* \frac{\partial U_*}{\partial x_*} = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2} d \left( 1 - \frac{U_*^2}{h_*^{1+\beta}} \right)$  et  $\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} (U_* h_*) = 0$ . La relation de dispersion généralisée s'obtient en annulant le déterminant du système linéarisé, ce qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} s_* + i k_* + d & \frac{i k_*}{F^2} - \frac{1+\beta}{2} d \\ i k_* & s_* + i k_* \end{vmatrix} = (s_* + i k_* + d)(s_* + i k_*) - i k_* \left( \frac{i k_*}{F^2} - \frac{1+\beta}{2} d \right) = 0.$$

Cette relation de dispersion s'écrit  $(S + i K + 1)(S + i K) + \frac{1}{F^2} K^2 + \frac{1+\beta}{2} i K = 0$  en posant  $S = s/d$  et  $K = k_1/d$ . **15)** Au seuil de l'instabilité, on a  $S = -i \Omega$ , ce qui entraîne  $(\Omega - K^2)^2 = K^2/F^2$  et  $\Omega - K = \frac{1+\beta}{2} K$  en séparant les parties réelles et imaginaires de l'équation. On en déduit que le seuil est obtenu pour  $F = \frac{2}{1+\beta}$ . Pour un seuil à  $F = 3/2$ , on obtient  $\beta = 1/3$ . On retrouve la paramétrisation de Strickler. **16)** Au seuil, la relation de dispersion s'écrit  $\Omega = \frac{3+\beta}{2} K$ , ce qui conduit, dans le cas  $\beta = 1/3$ , à  $\Omega = \frac{5}{3} K$ . En repassant aux unités dimensionnelles, on obtient la relation de dispersion  $\omega = \frac{5}{3} U_n k_1$  au seuil de l'instabilité. L'onde marginale émise par un obstacle est observée uniquement en aval de l'obstacle et a pour longueur d'onde  $k_1 = \frac{3}{5} \omega_0/U_n$ . Sa vitesse de phase et sa vitesse de groupe sont égales à  $\frac{5}{3} U_n$ . L'autre onde émise par l'obstacle est amortie.

**QUESTIONNAIRES À CHOIX MULTIPLES****CORRIGÉS DES QCM**



## BIBLIOGRAPHIE DE L'APM

- [1] Travaux des élèves de l'ENSEEIH :  
<http://www.enseeiht.fr/travaux/THEMES/travaux/optmfn/hi/hi.htm>
- [2] S. TERRADE, Présentation générales des instabilités de la mécanique des fluides, Travaux des élèves ENSEEIH 2001 :  
[www.enseeiht.fr/travaux/CD0001/travaux/optmfn/hi/01pa/hyb72/](http://www.enseeiht.fr/travaux/CD0001/travaux/optmfn/hi/01pa/hyb72/)
- [3] M. RIEUTORD, *Une introduction à la dynamique des fluides*, Masson (1997).
- [4] S. CHANDRASEKHAR *Hydrodynamics and Hydromagnetic stability*, Oxford University Press (1961), Dover (1981).
- [5] P. G. DRAZIN, W. H. REID, *Hydrodynamics stability*, Cambridge University Press (1981, 1984).



## APM 2

# Convection de Rayleigh-Bénard

### FICHE SIGNALÉTIQUE

Article Pédagogique Multimedia (APM)	
Titre :	Convection de Rayleigh-Bénard
Auteur :	O. THUAL, INPT/ENSEEIH
Référence :	<i>APM-INPT</i> <b>thu-rayben</b> (2003)
Mois de création :	novembre 2003
Mise à jour :	November 14, 2009
Comité de lecture :	néant
URL multimedia :	<a href="http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/">http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/</a>
Niveau :	Master I ou II
Cours oral :	1h30 à 2h
Animations :	néant
Mots clés :	convection, stabilité linéaire approximation de Boussinesq, Rayleigh critique

### OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

L'objectif de cet article pédagogique est de présenter la notion d'instabilité sur l'exemple de la convection de Rayleigh-Bénard. Plusieurs objectifs de formation sont visés :

- Se familiariser avec les équations de la mécanique des fluides dans le cadre de l'approximation de Boussinesq.
- Maîtriser la formulation des différents jeux de conditions aux limites qui conditionnent le forçage thermique et l'effet des parois sur le champ de

vitesse.

- Maîtriser et comparer plusieurs adimensionnalisations des équations d'un modèle de mécanique des fluides.
- Se familiariser avec la notion d'élimination de la pression dans le cas bidimensionnel avec l'introduction d'une fonction de courant.
- Assimiler la notion de linéarisation d'un modèle autour d'une solution stationnaire.
- Assimiler progressivement les étapes du calcul de la relation de dispersion généralisée autour du profil conductif.
- Déterminer les seuils critiques de l'instabilité convective à partir de l'expression des branches de valeurs propres.

Les compétences à acquérir lors de l'étude de cet article pédagogique sont les suivantes :

- Être capable de linéariser un système d'équations aux dérivées partielles autour d'une solution stationnaire.
- Être capable d'adimensionner un système d'équations aux dérivées partielles en effectuant un choix d'unités.
- Maîtriser le choix de la forme des vecteurs propres en fonction des invariances par translation du problème.
- Maîtriser le calcul de la relation de dispersion généraliser pour en déduire les seuils d'instabilité.

## PRÉ-REQUIS

Le niveau requis pour la lecture de cet article pédagogique se situe autour de celui d'une Licence scientifique. Quelques notions sur la formulation des équations de Navier-Stokes peuvent se révéler utiles.

## NOTATIONS

$\underline{b} = (b_1, b_2, \dots)$	Vecteur de composantes $b_i$
$C_v$	Capacité calorifique ( $\text{J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ )
$\mathcal{C}$	Plan complexe
$d$	Épaisseur de la couche fluide (m)
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport à $t$

$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à $x$
$D$	Opérateur $\frac{d}{dz}$
$\underline{\underline{D}}$	Tenseur des taux de déformation ( $s^{-1}$ )
$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$	Produit doublement contracté = $\text{tr}(\underline{\underline{D}}\underline{\underline{D}})$ ( $s^{-2}$ )
$e$	Énergie interne massique ( $J\text{ kg}^{-1}$ )
$\mathcal{E}$	Loi d'état pour l'énergie interne ( $J\text{ kg}^{-1}$ )
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs unitaires de la base canonique (m)
$\underline{f}$	Densité volumique des force extérieures ( $N\text{ m}^{-3}$ )
$g$	Gravité
$\text{grad}$	Opérateur gradient $m^{-1}$
$J(f, g)$	Opérateur $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ ( $m^{-1}$ )
$\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$	Vecteur d'onde ( $m^{-1}$ )
$k$	Norme du vecteur d'onde $\underline{k}$ ( $m^{-1}$ )
$k_0$	Nombre d'onde $2\pi/d$ ( $m^{-1}$ )
$k_c$	Nombre d'onde critique ( $m^{-1}$ )
$L$	Périodicité horizontale (m)
$P$	Nombre de Prandtl
$p(\underline{x}, t)$	Champ de pression (Pa)
$\mathcal{P}$	Loi d'état pour la pression (Pa)
$p_0(z)$	Profil de pression (Pa)
$p_r$	Pression constante (Pa)
$q$	Flux de chaleur ( $W\text{ m}^{-2}$ )
$r$	Taux de production volumique de chaleur ( $J\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-1}$ )
$R$	Nombre de Rayleigh
$R_n(k_1)$	Nombre de Rayleigh critique
$R_c(k_1)$	Nombre de Rayleigh critique $R_1(k_1)$
$\mathcal{R}$	Loi d'état pour la masse volumique ( $kg\text{ m}^{-3}$ )
$R_*$	Valeur particulière de $R$
$R_c(k_1, n)$	Rayleigh critique pour le mode $n$ et pour $k_1$
$R_c(k_1)$	Rayleigh critique $R_c(k_1, 1)$
$R_i(k_1)$	Rayleigh critique pour les modes impaires
$R_p(k_1)$	Rayleigh critique pour les modes paires
$\mathbb{R}$	Droite des réels
$s$	Valeur propre complexe ( $s^{-1}$ )
$T(\underline{x}, t)$	Champ de température ( $^{\circ}K$ )
$T_1, T_2$	Températures constantes ( $^{\circ}K$ )
$T_c(z)$	Profil de température ( $^{\circ}K$ )
$T_r$	Température de référence ( $^{\circ}K$ )
$t$	Temps (s)
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse ( $m\text{ s}^{-1}$ )
$\underline{U}_m$	Vecteur amplitude complexe de vitesse ( $m\text{ s}^{-1}$ )
$(u, v, w)$	Composantes de $\underline{U}(x, y, z)$ ( $m\text{ s}^{-1}$ )

$v$	Vitesse dans la direction $\underline{e}_y$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$v_m(z)$	Profil complexe ( $\text{m s}^{-1}$ )
$w$	Vitesse dans la direction $\underline{e}_z$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$w_m(z)$	Profil complexe ( $\text{m s}^{-1}$ )
$x$	Coordonnée sur l'axe $\underline{e}_x$ (m)
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
$y$	Coordonnée sur l'axe $\underline{e}_y$ (m)
$z$	Coordonnée sur l'axe $\underline{e}_z$ (m)
$\alpha$	Coefficient d'expansion thermique ( $^{\circ}\text{K}^{-1}$ )
$\beta$	Rapport $d/L$
$\Gamma$	Gradient de température $^{\circ}\text{K m}^{-1}$ )
div	Opérateur divergence $\text{m}^{-1}$
$\Delta$	Opérateur Laplacien $\text{m}^{-2}$
$\zeta$	Nombre sans dimension égal à 1 ou $\kappa/\nu$
$\xi$	Nombre sans dimension égal à 1
$\theta(\underline{x}, t)$	Écart de température ( $^{\circ}\text{K}$ )
$\theta_m$	Amplitude complexe de température ( $^{\circ}\text{K}$ )
$[\Theta]$	Unité de température ( $^{\circ}\text{K}$ )
$\Theta(z)$	Profil de température ( $^{\circ}\text{K}$ )
$\kappa$	Coefficient de conductivité thermique ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\lambda$	Constante ( $\text{m}^{-1}$ )
$\lambda_n$	Coefficient de viscosité de Lamé (Pa s)
$\mu_n$	Coefficient de viscosité de Lamé (Pa s)
$\nu$	Viscosité cinématique ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\Pi$	Pression généralisée (Pa)
$\rho(\underline{x}, t)$	Champ de masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\rho_r$	Masse volumique de référence ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\psi(x, z)$	Fonction de courant ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\psi_m$	Amplitude complexe de fonction de courant ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\Psi(z)$	Profil de fonction de courant ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )

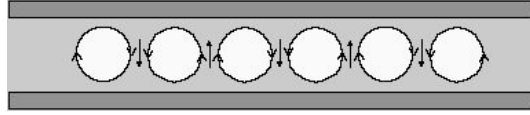
## COURS ÉCRIT

### Introduction

L'objectif est d'énoncer ici les équations du modèle permettant de rendre compte des mouvements de convection rencontrés dans un fluide soumis à un gradient de température puis de calculer les seuils de déclenchement de cette instabilité.

L'approximation de Boussinesq permet une formulation incompressible des équations de Navier-Stokes en prenant en compte des forces de flottabilité



Figure 2.1: *Rouleaux de convection.*

(poussée d'Archimède) dues à la dilatation du fluide et induite par une variation de la température.

Le système d'équations de l'approximation de Boussinesq étant énoncé, on s'intéresse à la configuration idéalisée d'une couche fluide horizontale forcée par un gradient thermique vertical, soit en imposant les températures aux frontières, soit en imposant un flux thermique. On explore alors les différents choix d'adimensionnalisation permettant la formulation mathématique du problème de Rayleigh-Bénard.

On envisage alors le cas où les températures de plaques sont fixées ainsi que le cas où le flux de chaleur est fixé. De même, on compare le cas des conditions aux limites cinématiques libres et rigides. L'état conductif est caractérisé par une vitesse nulle et un profil linéaire de température à gradient vertical. On suppose que le bas de la couche est plus chaud que le haut et l'on augmente progressivement le forçage. Lorsque le forçage thermique est faible l'état conductif est stable. Une perturbation de température ou de vitesse est dissipée par la diffusion thermique ou la viscosité avant que la force d'Archimède n'ait eu le temps d'agir. Lorsque le forçage thermique dépasse un seuil critique, l'état conductif devient instable et des mouvements de convection apparaissent.

Cette étude de stabilité s'effectue en linéarisant les équations autour de l'état conductif. On montre alors que la stabilité de l'état conductif ne dépend que de la valeur d'un nombre sans dimensions appelé nombre de Rayleigh. On calcule ici le nombre de Rayleigh critique pour plusieurs configurations de conditions aux limites.

## 1 Approximation de Boussinesq

Pour décrire le mouvement de convection d'un fluide chauffé par le bas lorsque le champ de vitesse reste faible devant la vitesse du son, les équations de Navier-Stokes compressibles sont trop complexes et les équations de Navier-Stokes incompressibles ne rendent pas compte des forces de flottabilité. L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces forces tout en filtrant les ondes sonores.

### 1.1 Fluides compressibles ou incompressibles

On rappelle tout d'abord les équations de Navier-Stokes incompressibles en utilisant les notations de l'ouvrage "Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables" (O. Thual, Cépaduès 1997) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U} \\
 \rho \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\operatorname{grad} p - \rho \underline{g} \underline{e}_z + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{U} + \mu_n \Delta \underline{U} \\
 \rho \frac{de}{dt} &= k \Delta T - p \operatorname{div} \underline{U} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{U})^2 + 2 \mu_n \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} \\
 e &= \mathcal{E}(\rho, T) \quad \text{et} \quad p = \mathcal{P}(\rho, e)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $\lambda_n$  et  $\mu_n$  sont les deux coefficients de viscosité de Lamé (avec  $\lambda_n = -2 \mu_n/3$  selon l'hypothèse de Stokes) et  $k$  le coefficient de conductivité thermique. Les notations suivantes sont utilisées pour les grandeurs physiques :  $\rho$  pour le champ de densité volumique,  $\underline{U}$  pour le champ de vitesse,  $p$  pour le champ de pression,  $e$  pour le champ d'énergie interne volumique,  $T$  pour le champ de température et  $\underline{\underline{D}}$  pour le champ de tenseur des taux de déformations obtenu en prenant la partie symétrique du gradient du champ de vitesse. La notation  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad}$  désigne la dérivée particulaire.

Les deux lois d'état  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}$  dépendent du fluide considéré. Ici, la densité volumique des forces extérieures  $\underline{f} = -\rho \underline{g} \underline{e}_z$  est celle induite par le champ de gravité. On a supposé qu'il n'y avait pas de taux de production volumique de chaleur ( $r = 0$ ). Pour fermer ce système d'équations, il faut spécifier des conditions aux limites, et, dans le cas où l'on s'intéresse aux solutions instationnaires, des conditions initiales.

L'approximation de fluide incompressible consiste à imposer  $\rho = \rho_r$  partout et à neutraliser la loi d'état  $p = \mathcal{P}(\rho, e)$  qui n'a alors plus de sens. Ceci revient à se placer dans la limite où la vitesse du son est infiniment grande devant la vitesse de l'écoulement. La pression, qui était une grandeur thermodynamique dans le cas compressible, devient une grandeur purement dynamique permettant de satisfaire la contrainte  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$  (on dit que  $p$  est le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte). On dit aussi que l'approximation de fluide incompressible permet de "filtrer" les ondes sonores. Ce filtrage permet d'augmenter considérablement le pas de temps des simulations numériques qui devrait, sinon, être plus petit que la période des vibrations sonores.

### 1.2 Équations de l'approximation de Boussinesq

Pour certains écoulements, l'approximation de fluide incompressible est trop drastique, car elle ne permet pas de prendre en compte les variations de densité dues aux variations de température. En présence de gravité, des inhomogénéités de densité induisent un champ de force d'Archimède qui peut

mettre le fluide en mouvement. Ces mouvements ne sont pourtant pas de même nature que les ondes sonores que l'on souhaite continuer à "filtrer". L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces variations de densité tout en supposant que la vitesse des ondes sonores est infinie devant la vitesse de l'écoulement. Elle consiste à écrire les équations d'évolution du fluide sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \rho_r \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\operatorname{grad} p - \rho_r g \underline{e}_z + \mu_n \Delta \underline{U} \\ \rho_r \frac{de}{dt} &= k \Delta T + 2 \mu_n \underline{D} : \underline{D} \\ e &= \mathcal{E}(\rho_r, T) \quad \text{et} \quad \rho = \rho_r [1 - \alpha(T - T_r)]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

On voit que l'on a supposé  $\rho$  égal à une densité constante  $\rho_r$  partout, sauf dans le terme  $\rho_r g \underline{e}_z$  qui est responsable de la force d'Archimède. Cette hypothèse d'incompressibilité a donc entraîné  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ , supprimant de ce fait plusieurs termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de bilan de l'énergie interne.

D'autre part, cette hypothèse d'incompressibilité interdit de prendre en compte une loi d'état de la forme  $p = \mathcal{P}(\rho, e)$  et la pression  $p$  devient un paramètre dynamique découplé de la thermodynamique. Cette loi d'état est alors remplacée par une loi  $\rho = \mathcal{R}(T)$  que l'on suppose linéaire en écrivant  $\rho = \mathcal{R}(T) = \rho_r [1 - \alpha(T - T_r)]$ . Le coefficient  $\alpha$  est appelé "coefficient de dilatation thermique". Il est positif dans la mesure où un échauffement autour de la température  $T_r$  induit une diminution de la densité.

La loi d'état  $e = \mathcal{E}(\rho_r, T)$  permet d'écrire  $\frac{de}{dt} = C_v(\rho_r, T) \frac{dT}{dt}$  avec  $C_v = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_{\rho}$ . En reportant les lois d'état dans le système d'équation, celui-ci se met sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho_r} + g z \right) + \alpha g (T - T_r) \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} \\ \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T + 2 \frac{\nu}{C_v} \underline{D} : \underline{D} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $\nu = \mu_n / \rho_r$  est la viscosité cinématique,  $\kappa = k / (\rho_r C_v)$  est le coefficient de diffusivité thermique à volume constant.

Dans la plupart des applications, on néglige le terme  $2 (\nu / C_v) \underline{D} : \underline{D}$ , qui correspond à l'échauffement du fluide par les forces visqueuses, devant le terme  $\kappa \Delta T$ , qui correspond à la diffusion de la température dans le fluide.

## 2 Problème de Rayleigh-Bénard

L'approximation de Boussinesq ayant été explicitée, il est maintenant possible de construire le modèle rendant compte de l'écoulement de convection observé lorsque l'on chauffe un fluide par le bas. Ce forçage est traduit dans le modèle par la formulation de conditions aux limites.

### 2.1 Conditions aux limites

On considère un fluide compris entre deux plaques planes horizontales délimitant les frontières d'équations  $z = 0$  et  $z = d$ . L'épaisseur de la couche fluide est donc la distance  $d$ .

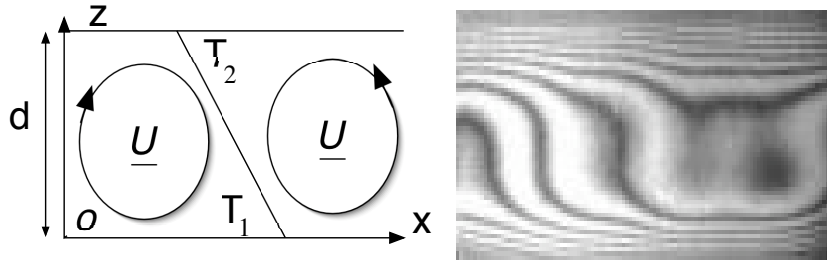


Figure 2.2: *Couche fluide chauffée par le bas. a) Schéma des rouleaux de convection. b) Visualisation expérimentale du champ de température.*

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq, il est nécessaire de spécifier des conditions aux limites pour la température et pour la vitesse. Pour ces deux catégories de conditions aux limites, plusieurs variantes sont possibles suivant la nature du problème physique considéré. Nous énumérons ici les principales configurations.

On considère deux types de conditions aux limites en température :

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées : } & T = T_1 \text{ en } z = 0, \quad T = T_2 \text{ en } z = d. \\ \text{Flux fixé : } & \kappa \frac{\partial T}{\partial z} = q \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les conditions aux limites en températures fixées correspondent au cas où les parois planes sont infiniment conductrices et relient le fluide à des thermostats de températures fixées. Les conditions aux limites en flux fixé correspondent à un chauffage délivrant une quantité de chaleur déterminée. Lorsque  $q < 0$  ou  $T_1 < T_2$  le fluide est dit stratifié. Le problème de Rayleigh-Bénard, que l'on considère ici, s'intéresse aux cas où  $q > 0$  ou  $T_1 > T_2$  pour lesquels des mouvements de convection peuvent se développer.

On considère deux types de conditions aux limites en vitesses :

$$\text{Libres : } \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ et } w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d.$$

$$\text{Rigides :} \quad u = v = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \quad (2.5)$$

Les conditions aux limites libres correspondent au cas idéalisé où la couche fluide considérée est comprise entre deux autres fluides et où la déformation des interfaces est négligée. Les conditions aux limites rigides correspondent au cas où les frontières sont des parois rigides.

## 2.2 État conductif

On appelle état conductif la solution stationnaire telle que  $\underline{U} = \underline{0}$  et  $T = T_c(z) = T_1 - \Gamma z$ . Cette solution satisfait les conditions aux limites en températures fixées en choisissant  $\Gamma = (T_1 - T_2)/d$  ou bien les conditions aux limites à flux fixé en choisissant  $\Gamma = q/\kappa$ .

On définit  $\theta$ , l'écart de température au profil conductif, à l'aide du changement de notation  $T(\underline{x}, t) = T_c(z) + \theta(\underline{x}, t)$ . Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Gamma w + \kappa \Delta \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec  $\Pi = p/\rho_r + g z + \alpha g T_r z - \alpha g T_1 z + \frac{1}{2} \alpha g \Gamma z^2 + \Pi_r$  où  $\Pi_r$  est une constante arbitraire. Dans ces équations, on a négligé le terme  $2(\nu/C_v) \underline{D} : \underline{D}$ , la vitesse verticale est notée  $w$  et l'on a utilisé  $T_c(z) \underline{e}_z = \operatorname{grad} (T_1 z - \frac{1}{2} \Gamma z^2)$ . Le terme  $\Gamma w$  représente l'advection de température par la vitesse due au gradient vertical de température  $\Gamma$ .

## 2.3 Modèle sous forme dimensionnelle

En explicitant les dérivées particulières, les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= \Gamma w + \kappa \Delta \theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les deux sortes de conditions aux limites pour la température considérées ici sont

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées :} \quad & \theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \\ \text{Flux fixé :} \quad & \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les deux sortes de conditions aux limites en vitesses sont :

$$\begin{aligned} \text{Libres :} \quad & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ et } w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \\ \text{Rigides :} \quad & u = v = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 3 Équations sous formes adimensionnées

Le choix d'un système d'unité permet d'écrire les équations du modèle sous forme adimensionnée. Cette procédure est essentielle pour déterminer le nombre de paramètres sans dimension qui contrôlent le problème. Toutes les adimensionnalisations sont équivalentes tant que l'on ne néglige pas de termes. On présente ici deux adimensionnalisations qui diffèrent par le choix de l'unité de temps.

#### 3.1 Choix des unités

Nous allons considérer plusieurs systèmes d'adimensionnalisation en explorant plusieurs choix d'unités. L'unité de longueur sera toujours basée sur l'épaisseur  $d$  de la couche fluide, ce que l'on note  $[L] = d$ . On note  $[\tau] = \zeta d^2/\kappa$  le choix des unités de temps, le facteur  $\zeta$  étant un nombre sans dimension que l'on pourra choisir ultérieurement. De même, on note  $[\Theta] = \xi d \Gamma$  le choix des unités de température, le nombre sans dimension  $\xi$  restant à choisir. On a supposé ici  $\Gamma > 0$ . On peut donc résumer cette famille d'adimensionnalisations en écrivant

$$[L] = d \quad [\tau] = \zeta d^2/\kappa \quad \text{et} \quad [\Theta] = \xi d \Gamma . \quad (2.10)$$

Si l'on choisit, par exemple,  $\zeta = 1$ , l'unité de temps  $[\tau] = d^2/\kappa$  est le temps caractéristique de diffusion de la température. Si l'on choisit maintenant  $\zeta = \kappa/\nu$ , l'unité de temps  $[\tau] = d^2/\nu$  est le temps visqueux. Si l'on choisit  $\xi = 1$ , l'unité de température  $[\Theta] = \Gamma d = T_1 - T_2$  est la différence de température entre le bas et le haut de la couche pour l'état conductif considéré. Quelque soit le choix de  $\zeta$  et  $\xi$ , l'unité de vitesse est le rapport entre l'unité de longueur et de temps ce que l'on écrit

$$[U] = [L]/[\tau] = \frac{1}{\zeta} \frac{\kappa}{d} . \quad (2.11)$$

#### 3.2 Équations adimensionnées

En utilisant les mêmes notations pour les champs que dans le cas où ces grandeurs sont dimensionnées, les équations adimensionnées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} \right) &= -\underline{\operatorname{grad}} \Pi + \xi R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} \\ \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \theta \right) &= \frac{1}{\xi} w + \Delta \theta \end{aligned} \quad (2.12)$$

où apparaissent les deux nombres adimensionnés que sont  $P$ , le nombre de Prandtl, et  $R$ , le nombre de Rayleigh, dont les expressions sont les suivantes

$$P = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{et} \quad R = \frac{\alpha g d^4 \Gamma}{\nu \kappa} = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa}. \quad (2.13)$$

L'écriture des conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = 1$  (en coordonnées adimensionnées) est identique à la formulation dimensionnée.

### 3.3 Adimensionnalisation visqueuse

On choisit ici  $\zeta = 1/P$  et  $\xi = 1$  ce qui conduit au système d'unités  $[L] = d$ ,  $[\tau] = d^2/\nu$ ,  $[U] = \nu/d$  et  $[\Theta] = \Gamma d = T_1 - T_2$ . Les équations adimensionnées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} &= -\underline{\operatorname{grad}} \frac{\Pi}{P} + R \theta \underline{e}_z + \Delta \underline{U} \\ P \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \theta \right) &= w + \Delta \theta \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 3.4 Adimensionnalisation thermique

On choisit ici  $\zeta = \xi = 1$  ce qui conduit au système d'unités  $[L] = d$ ,  $[\tau] = d^2/\kappa$ ,  $[U] = \kappa/d$  et  $[\Theta] = \Gamma d = T_1 - T_2$ . Les équations adimensionnées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} &= -\underline{\operatorname{grad}} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \theta &= w + \Delta \theta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 4 Problème de Rayleigh-Bénard bidimensionnel

Par simplicité, on se restreint ici aux écoulements bidimensionnels dans un plan vertical. Un raison physique permettant de justifier cette approche est le fait que l'on observe des rouleaux de convections 2D au seuil de l'instabilité, du moins pour les conditions aux limites présentées ici.

### 4.1 Fonction de courant

On se place ici dans le cas 2D défini par le fait que  $\underline{U}(x, z)$  et  $\theta(x, z)$  ne dépendent pas de la coordonnée  $y$ . Dans le cadre de l'adimensionnalisation thermique, les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + P \Delta u \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + P \Delta v \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R P \theta + P \Delta w \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= w + \Delta \theta.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

On voit que l'équation d'évolution de  $v$  est découplée des équations d'évolution de  $u$ ,  $w$  et  $\theta$ . La composante  $v$  se comporte donc comme un scalaire passif. En l'absence d'un gradient de pression dans la direction  $y$ , cette vitesse tend donc vers zéro.

L'équation  $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  entraîne alors qu'il existe une fonction de courant  $\psi(x, z)$  telle que  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$  et  $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Les conditions aux limites en vitesses s'expriment alors de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\text{Libres :} \quad & \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\
\text{Rigides :} \quad & \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

## 4.2 Élimination de la pression

Pour éliminer la pression généralisée  $\Pi$ , il suffit de prendre le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement. En remarquant que  $\text{rot } \underline{U} = -\Delta \phi \underline{e}^{(2)} = -(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}) \underline{e}^{(2)}$  et en projetant sur la direction  $\underline{e}^{(2)}$  orthogonale au plan 2D, on obtient les équations du mouvement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + J(\psi, \Delta \psi) &= R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\psi, \theta) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta
\end{aligned} \tag{2.18}$$

où la notation  $J$  est définie par  $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}$ .

## 5 Conditions aux limites périodiques

Le calcul de stabilité est simple s'il on suppose que l'écoulement est périodique dans toutes les directions. En effet, ces symétries de translations permettent de considérer des modes propres ayant la forme d'exponentielles en espace et en temps, solution du modèle linéarisé autour de la solution stationnaire conductive. Ce cas est présenté ici pour permettre une approche moins aride de la notation d'instabilité. Les calculs seront utiles pour des conditions aux limites plus réalistes.



### 5.1 Linéarisation

On linéarise les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq autour de l'état conductif décrit par  $\underline{U} = \underline{0}$ ,  $T = T_c(z) = T_1 + \Gamma z$  et  $\Pi = 0$  en choisissant la constante arbitraire  $\Pi_r$  convenablement. Avec la notation  $T = T_c(z) + \theta$ , cet état est caractérisé par  $\theta = 0$ .

En choisissant les unités de longueur  $[L] = d$ , de temps  $[\tau] = d^2/\kappa$  et de température  $[\Theta] = d \Gamma = T_1 - T_2$  de l'adimensionnalisation thermique, les équations linéarisées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Gamma w + \Delta \theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'expression des conditions aux limites abordées au chapitre précédent (températures fixées ou flux fixé, libres ou rigides) reste identique après linéarisation. Les deux sortes de conditions aux limites pour la température sont donc

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées :} & \quad \theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Flux fixé :} & \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les deux sortes de conditions aux limites en vitesses sont donc

$$\begin{aligned} \text{Libres :} & \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ et } w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Rigides :} & \quad u = v = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

### 5.2 Modes de Fourier

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas académique des conditions aux limites périodiques dans la direction  $z$  et nous notons  $2d$  la période pour la variable  $z$  dimensionnelle ce qui conduit à la périodicité 2 pour la variable  $z$  adimensionnée. Même si ces conditions aux limites ne correspondent pas, a priori, à une situation physique, elles présentent l'avantage d'introduire simplement des notions qui seront utiles pour l'examen de conditions aux limites physiques.

La linéarité des équations, la périodicité dans la direction verticale et l'invariance par translation dans les directions horizontales conduisent à la recherche de solutions sous la forme

$$[\underline{U}(\underline{x}, t), \theta(\underline{x}, t)] = [\underline{U}_m, \theta_m] e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} + s t} \quad (2.22)$$

où  $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$  avec  $k_1$  et  $k_2$  quelconques et  $k_3 = n \pi$  avec  $n$  entier pour assurer la périodicité en  $z$ . Les amplitudes  $\underline{U}_m$  et  $\theta_m$  sont des quantités

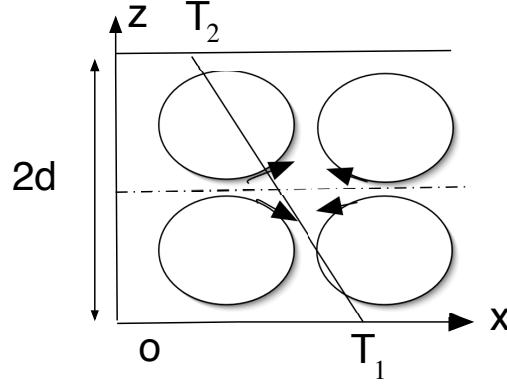


Figure 2.3: Conditions aux limites périodiques dans la direction  $z$ .

complexes. Comme le problème est linéaire, les solutions réelles sont obtenues en prenant la partie réelle des solutions complexes.

Pour étudier la stabilité temporelle de l'état conducteur, on suppose que  $\underline{k}$  est réel et  $s$  est complexe. Si l'on trouve des solutions non nulles telles que la partie réelle de  $s$  est positive, on pourra affirmer que l'état conducteur est instable dans la mesure où une petite perturbation est exponentiellement amplifiée, tout du moins dans le cadre de l'analyse linéaire. Dans le cas contraire, l'état conducteur est stable.

Pour un vecteur d'onde donné  $\underline{k}$ , on peut choisir le système de coordonnées de telle sorte que  $k_2 = 0$ . On voit alors que l'on se ramène au cas bidimensionnel où  $\underline{U}(x, z)$  et  $\theta(x, z)$  ne dépendent pas de la coordonnée  $y$  et où la composante  $v(x, z)$  ne joue aucun rôle. On peut donc introduire une fonction de courant  $\psi(x, z)$  et l'on considère alors des modes de Fourier de la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = [\psi_m, \theta_m] e^{i(k_1 x + k_3 z) + s t} \quad (2.23)$$

où  $\psi_m$  et  $\theta_m$  sont des amplitudes complexes.

### 5.3 Équation aux valeurs propres

En reportant l'expression des modes de Fourier dans le système d'équations 2D on en obtient la transformée de Fourier qui s'écrit

$$\begin{aligned} -s k^2 \psi_m &= i k_1 R P \theta_m + P k^4 \psi_m \\ s \theta_m &= i k_1 \psi_m - k^2 \theta_m \end{aligned} \quad (2.24)$$

où  $k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$  désigne le module du vecteur d'onde  $\underline{k}$ . On peut écrire ce système linéaire sous la forme

$$s \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P k^2 & -R P i k_1 / k^2 \\ i k_1 & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Ce système admet des solutions  $(\psi_m, \theta_m)$  non triviales lorsque le déterminant du système est nul c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} -P k^2 - s & -R P i k_1/k^2 \\ i k_1 & -k^2 - s \end{vmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$s^2 + s(P+1)k^2 + P k^4 - R P k_1^2/k^2 = 0. \quad (2.27)$$

#### 5.4 Détermination du signe des valeurs propres

Le discriminant de ce polynôme de degré deux en  $s$  est  $(P-1)^2 k^4 + 4 R P k_1^2/k^2$ . Son signe étant toujours positif, les racines sont réelles. Pour déterminer leurs signes, on écrit alors l'équation sous la forme

$$s^2 + s(P+1)k^2 + P \frac{k_1^2}{k^2} \left( \frac{k^6}{k_1^2} - R \right) = 0. \quad (2.28)$$

Pour  $R < k^6/k_1^2$  leur produit est positif et les deux racines sont négatives dans la mesure où leur somme l'est. Les deux modes de vecteur d'onde  $\underline{k}$  correspondant aux deux racines  $s_1$  et  $s_2$  sont alors amortis exponentiellement. Pour  $R > k^6/k_1^2$  un de ces modes croît exponentiellement dans la mesure où le produit des racines du polynôme en  $s$  est négatif.

#### 5.5 Détermination du Rayleigh critique

On rappelle ici que la périodicité en  $z$  requiert qu'un vecteur d'onde  $\underline{k} = (k_1, k_3)$  soit tel que  $k_3 = n \pi$  avec  $n$  entier. Étant donné un tel vecteur d'onde, la valeur critique du nombre de Rayleigh à partir de laquelle un des modes correspondant croît exponentiellement est donc

$$R_c(k_1, n) = \frac{(k_1^2 + n^2 \pi^2)^3}{k_1^2}. \quad (2.29)$$

Lorsque  $n$  varie, ce nombre est minimum pour  $n = 1$  et l'on peut alors tracer la courbe  $R_c(k_1) = R_c(k_1, 1)$ .

Le minimum de cette fonction est atteint pour  $k_c = \pi/\sqrt{2}$  et vaut  $R_c = R_c(k_c) = 27 \pi^4/4$ . On peut alors affirmer que pour  $R < R_c$ , tous les modes de vecteurs d'ondes  $\underline{k} = (k_1, n \pi)$  décroissent exponentiellement. L'état conducteur est alors stable. Pour  $R > R_c$ , une famille de modes incluant le vecteur d'onde  $(k_c, \pi)$  croissent exponentiellement. L'état conducteur est alors instable.

Lorsque que l'on considère des conditions aux limites périodiques dans la direction horizontale, la composante  $k_1$  du vecteur d'onde est de la forme  $k_1 = m k_0$  où  $k_0$  est le nombre d'onde fondamental et  $m$  est entier. Ce

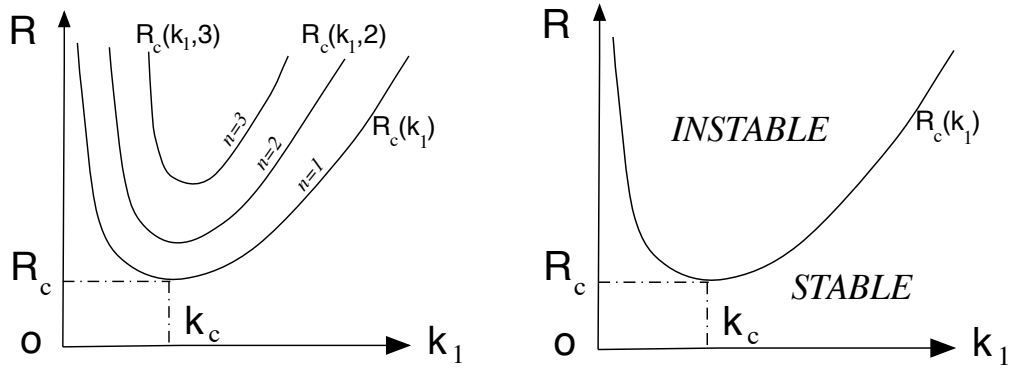


Figure 2.4: a) Courbes marginales  $R_c(k_1, n)$  pour  $n = 1, 2, 3$ . b) Domaine stabilité dans le plan  $(k_1, R)$ .

nombre d'onde peut s'écrire  $k_0 = 2 \pi \beta$  si  $\beta = d/L$  est le rapport de la longueur  $d$  sur la période horizontale  $L$  en coordonnées dimensionnées ( $1/\beta$  est la période horizontale en coordonnées adimensionnées). Le nombre de Rayleigh critique associé à ces conditions aux limites est alors  $R_c(k_0)$ . On remarque que le seuil de l'instabilité de Rayleigh-Bénard est indépendant du nombre de Prandtl  $P$ .

## 6 Conditions aux limites réalistes

On s'intéresse maintenant au calcul de stabilité du problème de Rayleigh-Bénard dans le cas de conditions aux limites réalistes. Le cas des conditions aux limites libres se déduit des calculs effectués pour les conditions aux limites périodiques dans la direction verticale. Le cas des conditions aux limites rigides nécessite un peu plus d'efforts.

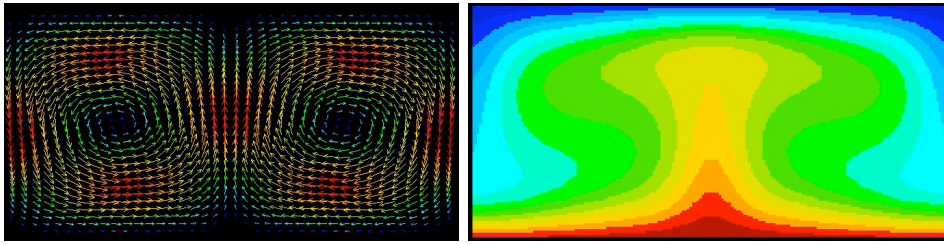


Figure 2.5: Visualisation numérique de rouleaux de convection. a) Champ de vitesse. b) Champ de température.

### 6.1 Problème aux valeurs propres

Pour étudier le cas des conditions aux limites physiques (températures fixées ou flux fixé, libres ou rigides) on cherche des solutions sous la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = [\Psi(z), \Theta(z)]e^{ik_1 x + st}. \quad (2.30)$$

La dépendance avec les variables horizontales est sinusoïdale dans la mesure où les équations sont invariantes par les translations dans ces directions. On peut alors choisir les coordonnées de telle sorte que la composante  $k_2$  du vecteur d'onde horizontal soit nulle, ce qui ramène le problème au cas bidimensionnel et donc à une fonction de courant  $\psi$ .

En reportant dans les équations on obtient le système

$$\begin{aligned} s(D^2 - k_1^2)\Psi &= -ik_1 RP\Theta + P(D^2 - k_1^2)^2\Psi \\ s\Theta &= -ik_1\Psi + (D^2 - k_1^2)\Theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $D = \frac{d}{dz}$  est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $z$ .

Les deux sortes de conditions aux limites en températures s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées :} & \quad \Theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Flux fixé :} & \quad D\Theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Les deux sortes de conditions aux limites en vitesses sont :

$$\begin{aligned} \text{Libres :} & \quad \Psi = 0 \text{ et } D^2\Psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Rigides :} & \quad \Psi = 0 \text{ et } D\Psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (2.33)$$

### 6.2 Élimination de $\Theta$

Pour éliminer la fonction  $\Theta(z)$  on écrit le système sous la forme

$$\begin{aligned} [s - P(D^2 - k_1^2)](D^2 - k_1^2)\Psi &= -ik_1 RP\Theta \\ [s - (D^2 - k_1^2)]\Theta &= -ik_1\Psi \end{aligned} \quad (2.34)$$

On applique l'opérateur  $s - (D^2 - k_1^2)$  à la première équation ce qui conduit à

$$[s - (D^2 - k_1^2)][s - P(D^2 - k_1^2)](D^2 - k_1^2)\Psi = -k_1^2 RP\Psi. \quad (2.35)$$

Comme  $\Psi = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$  à la fois pour les conditions aux limites libres et rigides, les deux sortes de conditions aux limites en températures s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées :} & \quad sD^2\Psi - P(D^2 - k_1^2)^2\Psi = 0 \text{ en } z = 0, 1. \\ \text{Flux fixé :} & \quad sD^3\Psi - P(D^2 - k_1^2)^2D\Psi = 0 \text{ en } z = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

## 7 Conditions aux limites en températures fixées

On se place ici dans le cas des conditions aux limites en températures fixées et on examine successivement le cas des conditions aux limites libres et rigides.

### 7.1 Conditions aux limites libres

Pour le cas des conditions aux limites libres, on doit résoudre l'équation

$$\left[ s - (D^2 - k_1^2) \right] \left[ s - P(D^2 - k_1^2) \right] (D^2 - k_1^2) \Psi = -k_1^2 R P \Psi . \quad (2.37)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi = 0, \quad D^2 \Psi = 0 \quad \text{et} \quad D^4 \Psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \quad (2.38)$$

La symétrie  $z \rightarrow -z$  de ce système entraîne que les solutions sont toutes de la forme  $\Psi = \psi_m \sin(n\pi z)$  où  $n$  est un nombre entier.

On voit alors que la discussion sur la stabilité de l'état conducteur est la même que celle qui a été menée pour le cas des conditions aux limites périodiques, ce qui conduit au nombre de Rayleigh critique et au nombre d'onde horizontal critique suivant :

$$R_c = \frac{27\pi^4}{4} \sim 657,5 \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 2,2 . \quad (2.39)$$

### 7.2 Conditions aux limites rigides

Pour le cas des conditions aux limites rigides, on doit résoudre l'équation

$$\left[ s - (D^2 - k_1^2) \right] \left[ s - P(D^2 - k_1^2) \right] (D^2 - k_1^2) \Psi = -k_1^2 R P \Psi . \quad (2.40)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi = 0, \quad D\Psi = 0 \quad \text{et} \quad s D^2 \Psi - P(D^2 - k_1^2)^2 \Psi = 0 \quad \text{en } z = 0, 1. \quad (2.41)$$

Les solutions  $\Psi(z)$  sont la superposition de fonction  $\exp(\pm\lambda z)$  où  $\lambda^2$  est l'une des trois solutions complexes de l'équation

$$\left[ s - (\lambda^2 - k_1^2) \right] \left[ s - P(\lambda^2 - k_1^2) \right] (\lambda^2 - k_1^2) + R P k_1^2 = 0 . \quad (2.42)$$

La recherche du Rayleigh critique s'effectue en posant  $s = 0$  dans les équations. En écrivant que le système avec ses conditions aux limites admet des solutions non triviales, on se ramène à une équation permettant de déterminer deux courbes  $R_p(k_1)$  et  $R_i(k_1)$  pour les modes pairs et impairs. En calculant le

minimum de ces fonctions, on obtient le nombre de Rayleigh critique des conditions aux limites rigides ainsi le nombre d'onde horizontal correspondant :

$$R_c \sim 1707.762 \quad \text{et} \quad k_c = 3.117 . \quad (2.43)$$

Le détail de ces calculs est explicité dans le livre “Hydrodynamics and Hydromagnetic stability” de S. Chandrasekhar (Oxford University Press 1961, Dover 1981).

## Conclusion

Nous avons donc énoncé le modèle permettant de décrire le mouvement convectif d'une couche fluide chauffée par le bas dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Différents jeux de conditions aux limites ont été détaillé. La solution stationnaire observée lorsque le forçage est faible correspond à un transfert de chaleur par conduction. Lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique, il apparaît des rouleaux de convection. Le calcul du nombre de Rayleigh critique a été effectué en linéarisant les équations du modèles autour de la solution conductive, puis en résolvant le problème aux valeurs propres associé.

## FORMULAIRE

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### **PROBLÈME 2.1** Rayleigh-Bénard avec rotation

#### Rotation seule

On considère un fluide pesant et compris entre deux plaques planes horizontales délimitant les frontières  $z = 0$  et  $z = d$ . On note  $\underline{g} = -g \underline{e}^{(3)}$  le champ de gravité. Le fluide et les plaques sont soumis à une rotation uniforme d'axe vertical  $\underline{\Omega}_0 = \Omega_0 \underline{e}^{(3)}$ . On suppose que la température du fluide est constante et que le mouvement de ce fluide est régi par le modèle des équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \rho_r \left( \frac{d\underline{U}}{dt} + 2 \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U} \right) &= -\underline{\operatorname{grad}} p - \rho_r g \underline{e}^{(3)} + \mu_n \Delta \underline{U} . \end{aligned} \quad (2.44)$$

La notation  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}}$  désigne la dérivée particulaire. On note  $\nu = \mu_n / \rho_r$  et  $\underline{U}(x, y, z, t) = u \underline{e}^{(1)} + v \underline{e}^{(2)} + w \underline{e}^{(3)}$ . On modélise l'interaction avec les plaques en  $z = 0$  et  $z = d$  par les conditions aux limites libres :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad w = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = d. \quad (2.45)$$

On suppose de plus que le débit moyen de l'écoulement est nul. On peut donc modéliser le problème à l'aide de conditions aux limites périodiques sur  $\underline{U}$  et  $p$  dans les directions horizontales.

- 1) Montrer que ces hypothèses entraînent que le repos  $\underline{U} = \underline{0}$  est une solution du problème. Expliciter le champ de pression  $p$  associé en supposant que  $p = p_1$  sur la plaque inférieure.
- 2) Montrer que l'on peut remplacer le terme  $-\text{grad } p - \rho_r g \underline{e}^{(3)}$  par le terme  $-\text{grad } \Pi$ , où  $\Pi(\underline{x}, t)$  est un champ que l'on explicitera.
- 3) Indiquer les dimensions de la quantité  $G_r = d^3 g / \nu^2$  (dans le système SI par exemple).
- 4) En fabriquant des unités de longueur et de temps à partir des paramètres  $d$  et  $\nu$ , écrire les équations du modèle sous forme adimensionnée. On définit le nombre de Taylor  $T_a$  par la relation  $T_a = 4 \Omega_0^2 d^4 / \nu^2$ .
- 5) On s'intéresse aux mouvements quasi-2D ( $v \neq 0$ ) définis par

$$\underline{U} = [u(x, z, t), v(x, z, t), w(x, z, t)] \quad \text{et} \quad p = p(x, z, t). \quad (2.46)$$

Écrire les équations adimensionnées pour les composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$ .

- 6) Montrer qu'il existe une fonction de courant  $\psi(x, z, t)$  telle que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.47)$$

- 7) Montrer qu'une partie des conditions aux limites peuvent s'écrire  $\psi = \psi_1$  en  $z = 0$  et  $\psi = \psi_2$  en  $z = 1$  où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des constantes.
- 8) En s'appuyant sur le fait que le débit horizontal moyen doit être nul, montrer que l'on peut choisir  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ .
- 9) Conclure en explicitant toutes les conditions aux limites en fonction de  $\psi$  et de  $v$ .
- 10) Éliminer la pression en prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement en projetant sur  $\underline{e}^{(2)}$ . En déduire le système d'équations aux dérivées partielles régissant l'évolution de  $\psi$  et  $v$ . On pourra utiliser la notation  $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}$ .
- 11) Écrire le système d'équations linéarisées autour de l'état de repos  $\underline{U} = \underline{0}$ .
- 12) On cherche des solutions de la forme

$$[\psi(x, z, t), v(x, z, t)] = [\Psi(z), V(z)] e^{i k_1 x + s t}. \quad (2.48)$$

En notant  $D = \frac{d}{dz}$ , écrire le système d'équations différentielles ordinaires que vérifient les profils  $\Psi(z)$  et  $V(z)$  ainsi les conditions aux limites associées.



- 13) Montrer que ces profils sont de la forme  $\Psi(z) = \Psi_m F(n\pi z)$  et  $V(z) = V_m G(n\pi z)$  où  $\Psi_m \in \mathcal{C}$  et  $V_m \in \mathcal{C}$  sont des constantes,  $n \in \mathbb{N}$  un entier strictement positif et  $F(\zeta)$  et  $G(\zeta)$  des fonctions trigonométriques simples que l'on précisera. Écrire le système linéaire que doit vérifier le couple  $(\Psi_m, V_m)$  en notant  $k$  le nombre d'onde défini par  $k^2 = k_1^2 + n^2 \pi^2$ .
- 14) En déduire que le couple  $(\Psi_m, V_m)$  est différent de zéro si et seulement si les nombres  $s$ ,  $k_1$ ,  $n$  et  $T_a$  sont reliés par une relation polynomiale  $P(s, k_1, k; T_a) = 0$ . En déduire l'expression des valeurs propres  $s$  en fonction de  $k_1$ ,  $n$  et  $T_a$ .
- 15) Discuter la stabilité du repos en fonction de la valeur du nombre de Taylor  $T_a$ .
- 16) Montrer que cette analyse quasi-2D rend compte de la stabilité du repos vis-à-vis de perturbations 3D.
- 17) Indiquer comment varient qualitativement les solutions du problème lorsque la gravité  $g$  ou la densité  $\rho_r$  varient.

### Convection et rotation

On suppose maintenant que la température des plaques est maintenue aux températures constantes  $T = T_1$  en  $z = 0$  et  $T = T_2$  en  $z = d$  et que le mouvement de ce fluide est régi par le modèle des équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{d\underline{U}}{dt} + 2 \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U} &= -\operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho_r} + g z \right) + \alpha g (T - T_0) \underline{e}^{(3)} + \nu \Delta \underline{U} \\ \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T \end{aligned} \quad (2.49)$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'expansion thermique de la loi d'état  $\rho = \rho_r[1 - \alpha(T - T_0)]$  et  $\kappa$  est le coefficient de diffusivité thermique. Dans ces équations, on a négligé la puissance des forces intérieures visqueuses  $2 \frac{\nu}{C_v} \underline{D} : \underline{D}$ . Pour le champ de vitesse, on reste dans le cadre des conditions aux limites libres sur les plaques avec un débit moyen nul.

- 18) En se restreignant aux instabilités de type stationnaires (valeur propre  $s$  devenant positive), décrire la surface  $R = R_c(k_1, T_a)$  de stabilité marginale ( $s = 0$ ) de l'état conductif dans l'espace des paramètres  $(k_1, R, T_a)$ . Montrer, en particulier, que la rotation a toujours un effet stabilisant.
- 19) Indiquer une méthode permettant de calculer la surface de stabilité marginale des instabilités oscillatoires (on ne demande pas de faire les calculs).

### **PROBLÈME 2.2** Explorations numériques

On donne ici quelques indication pour des sujets d'études numériques et analytiques pouvant conduire à des travaux d'approfondissements.

- 1) Simuler les équations de Ginzburg-Landau complexe avec un  $\mu(x)$  variable et un terme  $c_g A_x$  rendant compte d'une vitesse de groupe. On pourra alors séparer les domaines d'instabilité absolue ou convective.
- 2) Simuler le modèle suivant de couplage d'oscillateurs :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V'(u) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (2.50)$$

- 3) Simuler numériquement le choc de l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (2.51)$$

- 4) Simuler la dispersion des ondes dans l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} . \quad (2.52)$$

## **CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES**

### **Corrigé 2.1** Rayleigh-Bénard avec rotation

#### **Rotation seule**

**1)** L'absence de gradient de débit moyen entraîne que le repos est solution. La pression associée est alors la pression hydrostatique  $p = p_1 - \rho_r g z$ . **2)** On peut poser  $\Pi = p - p_1 + \rho_r g z$ . C'est ici l'écart à la pression hydrostatique. **3)** La quantité  $G_r$  est un nombre sans dimension. **4)** On choisit  $[L] = d$  comme unité de longueur et  $[\tau] = d^2/\nu$  comme unité de temps. L'unité de vitesse est alors  $\nu/d$  et l'unité de pression est  $\rho_r \nu^2/d^2$ . En notant les grandeurs adimensionnées de la même façon que les grandeurs physiques, les équations s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{d\underline{U}}{dt} + T_a^{\frac{1}{2}} \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{U} &= -\underline{\operatorname{grad}} \Pi + \Delta \underline{U} . \end{aligned} \quad (2.53)$$

**5)** Les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + T_a^{\frac{1}{2}} v + \Delta u \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -T_a^{\frac{1}{2}} u + \Delta v \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \Delta w .
\end{aligned} \tag{2.54}$$

**6)** La relation d'incompressibilité  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  et la nature 2D du mouvement entraînent qu'il existe une fonction de courant. **7)** Les conditions aux limites  $w = 0$  s'écrivent  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$  (unité adimensionnées). Étant donnée la géométrie (plane) des plaques, on en déduit que la fonction de courant  $\psi$  est constante sur chacune des plaques. **8)** L'intégrale de  $u$  sur une verticale est une constante, comme le montre l'égalité  $\int_0^1 u \, dz = -\int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial z} \, dz = \psi_1 - \psi_2$ . Si  $\psi_1$  n'était pas égal à  $\psi_2$  le débit moyen ne serait pas nul. Comme la fonction de courant est définie à une constante près, on peut donc écrire  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . **9)** Les conditions aux limites sont donc  $\psi = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$  et  $v = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ . **10)** Le rotationnel de la vitesse  $\underline{U}$  est parallèle à  $\underline{e}^{(2)}$ . Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + J(\psi, \Delta \psi) &= -T_a^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta^2 \psi \\
\frac{\partial v}{\partial t} + J(\psi, v) &= T_a^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta v .
\end{aligned} \tag{2.55}$$

**11)** La linéarisation des équations consiste à négliger les termes non-linéaires  $J(\psi, \Delta \psi)$  et  $J(\psi, v)$ . **12)** Les profils  $\Psi(z)$  et  $V(z)$  vérifient le système

$$\begin{aligned}
s (D^2 - k_1^2) \Psi &= -T_a^{\frac{1}{2}} Dv + (D^2 - k_1^2)^2 \Psi \\
s v &= T_a^{\frac{1}{2}} D\Psi + (D^2 - k_1^2) v .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

avec les conditions aux limites  $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ ,  $D^2 \Psi(0) = D^2 \Psi(1) = 0$  et  $DV(0) = DV(1) = 0$ . **13)** Le choix  $F(\zeta) = \sin(\zeta)$  et  $G(\zeta) = \cos(\zeta)$  permet de satisfaire les conditions aux limites. En reportant dans les équations, on est conduit à résoudre le système :

$$s \begin{pmatrix} \Psi_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2 & -n \pi T_a^{\frac{1}{2}} / k^2 \\ n \pi T_a^{\frac{1}{2}} & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_m \\ V_m \end{pmatrix} . \tag{2.57}$$

**14)** On obtient des solutions non triviales en imposant au déterminant du système linéaire d'être nul :

$$\begin{vmatrix} -k^2 - s & -n \pi T_a^{\frac{1}{2}} / k^2 \\ n \pi T_a^{\frac{1}{2}} & -k^2 - s \end{vmatrix} = (s^2 + k^2)^2 + n^2 \pi^2 T_a / k^2 = 0 . \tag{2.58}$$

Les valeurs propres sont donc  $s_{\pm}(k_1, n; T_a) = -k^2 \pm i n \pi T_a^{\frac{1}{2}}/k$ . **15)** Le repos est toujours stable car les valeurs propres  $s$  ont une partie réelle négative. **16)** L'analyse 3D amène à considérer des perturbations de la forme

$$[\Psi(z), V(z)] e^{i k_1 x + i k_2 y + s t}.$$

Il suffit alors de choisir une nouvelle base dont le premier vecteur unitaire est dans la direction du vecteur  $k_1 \underline{e}^{(1)} + k_2 \underline{e}^{(2)}$  pour se ramener au cas quasi-2D déjà étudié. **17)** Le champ de vitesse est indépendant de la gravité  $g$  ou de la densité  $\rho_r$  ou du nombre sans dimension  $G_r$ . Seule l'expression de la pression hydrostatique, qui n'influence pas le mouvement, dépend du poids du fluide.

### Convection et rotation

**18)** Pour discuter la stabilité de la convection de Rayleigh-Bénard soumise à une rotation, il suffit de combiner l'analyse du cours et des questions précédentes. Il est préférable de choisir l'adimensionnalisation visqueuse basée sur l'unité de temps  $[\tau] = d^2/\nu$  pour rester dans le cadre développé lors des questions précédentes. On note alors  $\theta$  l'écart de température au profil linéaire conductif en unités adimensionnées. Les nombres sans dimension contrôlant le problème sont  $T_a$ , le nombre de Taylor,  $R$  le nombre de Rayleigh et  $P$ , le nombre de Prandtl. En posant

$$[\psi, \theta, v] = [\Psi(z), \Theta(z), V(z)] e^{i k_1 x + s t}, \quad (2.59)$$

avec  $\Psi(z) = \Psi_m \sin(n \pi z)$ ,  $\Theta(z) = \Theta_m \sin(n \pi z)$  et  $V(z) = V_n \cos(n \pi z)$ , les valeurs propres  $s$  sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} -k^2 - s & i R k_1/k^2 & -n \pi T_a^{\frac{1}{2}}/k^2 \\ -i k_1 & -k^2 - P s & 0 \\ n \pi T_a^{\frac{1}{2}} & 0 & -k^2 - s \end{vmatrix} = 0. \quad (2.60)$$

La surface de stabilité marginale des instabilités stationnaires pour  $n$  fixé est obtenue en posant  $s = 0$  dans cette équation, ce qui conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} -k^2 & i R k_1/k^2 & -n \pi T_a^{\frac{1}{2}}/k^2 \\ -i k_1 & -k^2 & 0 \\ n \pi T_a^{\frac{1}{2}} & 0 & -k^2 \end{vmatrix} = -k^6 + R k_1^2 - n^2 \pi^2 T_a = 0, \quad (2.61)$$

ce qui s'écrit  $R_c(k_1, n, T_a) = \frac{(k_1^2 + n^2 \pi^2)^3 + n^2 \pi^2 T_a}{k_1^2}$ . Ce nombre est minimum pour  $n = 1$ , ce qui conduit à  $R_c(k_1, T_a) = \frac{(k_1^2 + \pi^2)^3 + \pi^2 T_a}{k_1^2}$ . Comme  $R_c(k_1, T_a) > R_c(k_1, 0)$ , on voit que la rotation retarde l'apparition de la convection. Le

nombre d'onde critique  $k_c(T_a)$  et le nombre de Rayleigh critique  $R_c(T_a)$  peuvent être obtenus en minimisant la fonction  $R_c(k_1, T_a)$  pour  $T_a$  fixé (équation du troisième degré en  $k_1^2$  à résoudre). **19)** La courbe marginale des instabilités oscillatoires est obtenue en cherchant des valeurs propres  $s = i\omega$  imaginaire pure. En reportant cette valeur dans le déterminant et en annulant les parties réelle et imaginaire de l'équation de dispersion ainsi obtenue, on obtient l'équation de la surface de stabilité marginale sous la forme  $R = R_c^{oscil}(k_1, T_a, P)$  ainsi que la valeur  $\omega(k_1, T_a, P)$  de la pulsation des oscillations au seuil.

## QUESTIONNAIRES À CHOIX MULTIPLES

### CORRIGÉS DES QCM



## BIBLIOGRAPHIE DE L'APM

- [1] S. CHANDRASEKHAR *Hydrodynamics and Hydromagnetic stability*, Oxford University Press (1961), Dover (1981).
- [2] P. G. DRAZIN, W. H. REID, *Hydrodynamics stability*, Cambridge University Press (1981, 1984).
- [3] P. BERGÉ, Y. POMEAU, C. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Herman (1984).
- [4] M. BENDER et S. A. ORSZAG, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill (1978).
- [5] O. THUAL, *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus*, Cépaduès-Éditions (1997).
- [6] V. I. ARNOLD, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer Verlag (1983), voir aussi Editions Mir en français.
- [7] J. GUCKEINHEIMER, P. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*, Springer Verlag (1983).
- [8] M. RIEUTORD, *Une introduction à la dynamique des fluides*, Masson (1997).





## APM 3

# Bifurcations génériques de l'équilibre

### FICHE SIGNALÉTIQUE

Article Pédagogique Multimedia (APM)	
Titre :	Bifurcations génériques de l'équilibre
Auteur :	O. THUAL, INPT/ENSEEIH
Référence :	<i>APM-INPT thu-bifgen</i> (2003)
Mois de création :	septembre 2003
Mise à jour :	November 14, 2009
Comité de lecture :	néant
URL multimedia :	<a href="http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/">http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/</a>
Niveau :	Master I ou II
Cours oral :	1h30 à 2h
Animations :	néant
Mots clés :	bifurcations, stabilité linéaire systèmes dynamiques, formes normales

### OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

Cet article pédagogique a pour but de présenter, de la manière la plus simple possible, les bifurcations “génériques”, c’est-à-dire les plus courantes, décrivant la déstabilisation d’un système dynamique lorsque l’on varie un de ses paramètres. Plusieurs objectifs de formation sont visés :

- Assimiler la notion de stabilité d’un équilibre.
- Comprendre la notion de paramètre de contrôle.

- Se familiariser avec certains éléments de vocabulaire des systèmes dynamiques.
- Assimiler les trois diagrammes de bifurcation des trois exemples étudiés.
- Comprendre la portée des trois exemples simples étudié en assimilant la notion de bifurcation générique.
- Assimiler la notion de brisure de symétrie dans le cas de la bifurcation fourche.

Les compétences à acquérir lors de l'étude de cet article pédagogique sont les suivantes :

- Être capable de calculer les propriétés de stabilité de l'équilibre pour des systèmes dynamiques réels ou complexes à un degré de liberté.
- Être capable de tracer les trois diagrammes de bifurcations correspondant aux trois bifurcations génériques de l'équilibre.

## PRÉ-REQUIS

Le niveau requis pour la lecture de cette article pédagogique se situe autour de celui d'une Licence scientifique.

## NOTATIONS

$a$	Notation pour $\sqrt{\mu/\alpha}$ ou $\sqrt{-\mu/\alpha}$
$\underline{b} = (b_1, b_2, \dots)$	Vecteur de composantes $b_i$
$\cosh$	Cosinus hyperbolique
$\dot{x}(t)$	Dérivée de la fonction $x(t)$
$f'(x)$	Dérivée de la fonction $f(x)$
$f(x)$	Fonction quelconque
$\underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X})$	Fonction vectorielle quelconque
$O(b)$	Du même ordre de grandeur que $b$
$p$	Constante ou paramètre de contrôle
$q$	Constante ou paramètre de contrôle
$\sinh$	Sinus hyperbolique
$S$	Symétrie point $x \rightarrow -x$
$\underline{S}$	Matrice 3x3 des composantes d'une symétrie
$t$	Temps
$\tanh$	Tangente hyperbolique
$u(t)$	Écart à l'équilibre
$x$	Variable d'un système dynamique

$x$	Partie réelle de $z$
$x_e$	Équilibre d'un système dynamiques
$x_+$	Équilibre particulier
$x_-$	Équilibre particulier
$x(t)$	Trajectoire solution d'un système dynamique
$\underline{X}$	Variables d'un système dynamique
$\underline{X}_e$	Équilibre d'un système dynamiques
$\underline{X}_+$	Équilibre particulier
$\underline{X}_-$	Équilibre particulier
$\underline{X}(t)$	Trajectoire solution d'un système dynamique
$y$	Partie imaginaire de $z$
$y(t)$	Notation pour $-x(t)$
$z = x + i y$	Variable complexe d'un système dynamique
$z(t)$	Trajectoire complexe solution d'un système dynamiques
$ z $	Module de $z$
$\alpha$	Constante ou paramètre de contrôle
$\beta$	Constante ou paramètre de contrôle
$\gamma$	Constante ou paramètre de contrôle
$\delta$	Constante ou paramètre de contrôle
$\theta$	Argument de $z$
$\lambda$	Valeur propre
$\mu$	Paramètre de contrôle de la bifurcation
$\underline{\mu}$	Paramètres de contrôle de la bifurcation
$\underline{\mu}_c$	Paramètres critiques
$\rho$	Module de $z$
$\omega$	Constante ou paramètre de contrôle
$\omega_e$	Pulsation à l'équilibre

## COURS ÉCRIT

### Introduction

Un grand nombre de modèles issus de la mécanique des milieux continus s'écrivent sous la forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques ou de systèmes d'équations différentielles ordinaires, le temps étant la variable décrivant l'évolution du système. On parle de "systèmes dynamiques" pour les équations différentielles ordinaires et on appelle "nombre de degrés de liberté" le nombre d'équations couplées du système. La résolution numérique des équations aux dérivées partielles se ramène toujours à un système dynamique, en discrétisant l'espace ou en projetant sur un ensemble fini de fonctions. Le nombre de degrés de liberté est alors grand si la résolution

spatiale est grande.

Une première approche pour l'étude de ces équations d'évolution consiste à rechercher les équilibres, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas d'évolution temporelle. On dit qu'un équilibre est stable si une petite perturbation de cet équilibre évolue dans le temps en restant petite et en convergeant vers zéro. Le système revient alors dans sa position d'équilibre. Ces équilibres ont donc de grandes chances d'être observés sur le système physique étudié ou sur la simulation numérique du modèle proposé.

L'étape suivante consiste à faire varier un ensemble de paramètres contrôlant le système, comme par exemple l'intensité du forçage ou les dimensions géométriques du domaine. On regarde alors ce que deviennent les équilibres du modèle, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres de contrôle. Lorsqu'en variant les valeurs des paramètres de contrôle, un équilibre stable devient instable ou disparaît, on dit que l'on est en présence d'une "bifurcation". L'étude systématique des bifurcations fait appel à un arsenal mathématique développé (formes normales) qui a permis de classifier un grand nombre de comportements observés dans les systèmes physiques.

Ici nous ne nous intéressons qu'aux bifurcations les plus courantes pouvant affecter un équilibre lorsque l'on varie des paramètres de contrôle. Faire varier continuellement  $n$  paramètres de contrôle peut être vu comme un chemin continu dans un espace vectoriel de dimension  $n$ . Nous verrons que la déstabilisation d'un équilibre correspond au changement de signe de la partie réelle d'une des valeurs propres de l'opérateur linéaire gouvernant les petites perturbations du voisinage de cet équilibre. On voit donc que ce changement de signe définit une surface de codimension 1 dans l'espace de contrôle. En suivant un chemin continu dans l'espace de contrôle, on a de bonnes chances de traverser cette surface et d'assister alors à la déstabilisation de l'équilibre. Une telle bifurcation de codimension 1 est dite "générique". Pour observer des bifurcations non génériques, c'est-à-dire de codimension supérieure à 1, il faut faire varier plusieurs paramètres de contrôle à la fois. Il est donc impossible de les rencontrer en variant au hasard les paramètres de contrôle.

La théorie des formes normales appliquées aux systèmes dynamiques montre qu'il n'y a que trois bifurcations génériques de l'équilibre. Lorsque la valeur propre responsable de la déstabilisation est réelle, on parle de bifurcation stationnaire. On est alors en présence d'une bifurcation "noeud-col" dans le cas général, et "fourche" lorsque qu'il y a "brisure d'une symétrie". Lorsque qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires, on est en présence d'une bifurcation "de Hopf".

Nous allons étudier ces trois bifurcations (noeud-col, fourche et Hopf) sur les exemples les plus simples, qui sont, par ailleurs, les "formes normales" de tous les systèmes dynamiques à plus grand nombre de degrés de liberté dont les équilibres subissent l'une de ces bifurcations.

## 1 Bifurcation noeud-col

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = \mu + \alpha x^2 . \quad (3.1)$$

On s'intéresse à l'ensemble de toutes les solutions de ce système dynamique.

### 1.1 Éléments de vocabulaire sur les systèmes dynamiques

On appelle "espace des phases" l'ensemble des états  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle espace de contrôle l'ensemble des paramètres  $(\mu, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ . Pour ce système dynamique, l'espace des phases est donc de dimension 1. On dit qu'il s'agit d'un système dynamique à un degré de liberté. L'espace de contrôle est de dimension 2.

Les systèmes dynamiques autonomes (indépendants du temps) à un degré de liberté s'écrivent sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) = F(\underline{\mu}; x) \quad (3.2)$$

où  $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  appartient à l'espace de contrôle. On suppose que  $f(x)$  est une fonction continuellement dérivable. Une solution quelconque  $x(t)$  d'un tel système dynamique décrit une trajectoire dans l'espace des phases. Elle est issue d'une condition initiale  $x(0) = x_0$  à  $t = 0$ . Les trajectoires dans un espace des phases de dimension 1 ont pour support quatre types de courbes : un point, un segment ouvert, une demi-droite ouverte ou la droite tout entière. Un point d'équilibre  $x_e$ , qui forme à lui seul une trajectoire, est solution de l'équation  $f(x_e) = F(\underline{\mu}, x_e) = 0$ .

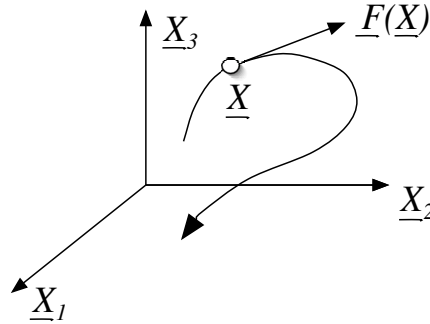


Figure 3.1: Système dynamique à trois degrés de libertés.

Les systèmes dynamiques autonomes (indépendants du temps) à  $n$  degrés de liberté s'écrivent sous la forme

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X}) \quad (3.3)$$

avec  $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$  appartenant à l'espace des phases. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires couplées que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\dot{X}_i = F_i(\mu_1, \dots, \mu_m; X_1, \dots, X_n) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

On suppose que  $\underline{F}$  est continuellement différentiable. Une solution  $\underline{X}(t)$  de ce système décrit une trajectoire dans l'espace des phases. Un point d'équilibre  $\underline{X}_e$ , formant à lui seul une trajectoire, est solution de l'équation implicite  $\underline{F}(\mu; \underline{X}_e) = \underline{0}$ . On dit aussi que c'est une solution stationnaire ou encore un point critique du système dynamique.

On montre (théorème de Cauchy) qu'une condition initiale  $\underline{X}(0)$  donne naissance à une et une seule trajectoire  $\underline{X}(t)$ . On en déduit que, pour un système dynamique autonome, deux trajectoires l'espace des phases ne se coupent jamais. Deux courbes contenant des trajectoires se coupent en une trajectoire qui est un point d'équilibre.

Les systèmes dynamiques non autonomes à  $n$  degrés de liberté s'écrivent sous la forme

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\mu; \underline{X}, t) \quad (3.5)$$

avec  $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$  appartenant à l'espace des phases. On peut les ramener au cas des systèmes autonomes à  $n + 1$  degrés de liberté en considérant le temps  $t$  comme une variable  $X_{n+1} = t$  supplémentaire de l'espace des phases et en ajoutant l'équation  $\dot{X}_{n+1} = 1$ . Notons que ce nouveau système dynamique ne peut pas admettre d'équilibre.

## 1.2 Bifurcation noeud-col pour $\alpha < 0$ .

On suppose que  $\alpha$  est négatif. La recherche des solutions stationnaires conduit à résoudre l'équation  $f(x) = 0$  que l'on écrit

$$F(\mu, \alpha; x) = \mu + \alpha x^2 = 0. \quad (3.6)$$

L'ensemble des solutions stationnaire est l'ensemble vide  $\emptyset$  pour  $\mu < 0$ , le singleton  $\{0\}$  pour  $\mu = 0$  et  $\{-a, a\}$  pour  $\mu > 0$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$ .

On dit qu'un point d'équilibre  $x_e$ , vérifiant donc  $f(x_e) = 0$ , est stable, si une petite perturbation  $u(0)$  autour de cet équilibre est amortie au cours du temps. Autrement dit, si la condition initiale  $x(0) = x_e + u(0)$ , avec  $u(0)$  "petit", donne naissance à une trajectoire  $x(t) = x_e + u(t)$  convergeant vers  $x_e$ , c'est-à-dire tel que  $u(t)$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Pour déterminer si un équilibre  $x_e$  d'un système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  est stable, on effectue le développement limité suivant

$$\dot{x}(t) = \dot{u}(t) = f[x_e + u(t)] = f'(x_e) u(t) + O(|u(t)|^2). \quad (3.7)$$

On a utilisé ici  $\dot{x}_e = 0$  et  $f(x_e) = 0$ . Tant que  $u(t)$  reste petit, la solution peut être approchée en résolvant l'équation

$$\dot{u} = \lambda u \quad (3.8)$$

avec  $\lambda = f'(x_e)$ . On dit que l'on a linéarisé le système dynamique autour de l'équilibre  $x_e$ .

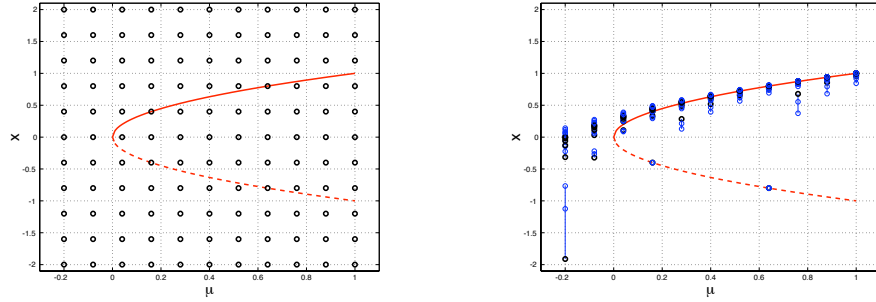


Figure 3.2: Diagramme  $(\mu, x)$  de la bifurcation noeud-col. a) Conditions initiales  $[\mu, x(0)]$  répartie régulièrement. b) Positions des points  $[\mu, x(t)]$  au bout du temps  $t$ .

En tenant compte de sa condition initiale, la solution de ce système s'écrit

$$u(t) = u(0) \exp(\lambda t) . \quad (3.9)$$

On voit alors que, pour  $\lambda = f'(x_e) < 0$ , la perturbation  $u(t)$  tend vers zéro. L'équilibre est alors stable. Lorsque  $f'(x_e) > 0$ , l'équilibre est instable et le système linéarisé cesse d'être valide lorsque  $u(t)$ , qui croît exponentiellement, devient trop grand. Pour le cas critique  $f'(x_e) = 0$ , on dit que l'équilibre est marginal. Pour cette valeur très particulière, l'étude de stabilité, lorsqu'on s'y intéresse, nécessite de pousser le développement limité de  $f(x)$  autour de  $x_e$  jusqu'au terme d'ordre 2, ce qui conduit à une équation non linéaire.

Dans le cas général d'un système dynamique à  $n$  degrés de libertés  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ , on montre que la stabilité d'un équilibre  $\underline{X}_e$  vérifiant  $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$  dépend du signe de la partie réelle de la matrice  $\underline{D}\underline{F}(\underline{X}_e)$  jacobienne de l'application  $\underline{F}$  et de composantes  $\partial F_i / \partial X_j$ . En effet, si on pose  $\underline{X} = \underline{X}_e + \underline{U}$ , on doit résoudre  $\dot{\underline{U}} = \underline{D}\underline{F}(\underline{X}_e) \underline{U} + O(\|\underline{U}\|^2)$ . Dans le cas  $n = 1$  qui nous intéresse ici, la jacobienne n'a qu'une composante qui est  $f'$ .

Pour l'exemple particulier qui nous intéresse ici, on a  $f'(x) = 2 \alpha x$ . La stabilité des équilibres est donc donnée par les nombres  $\lambda = f'(x_-) = 2\sqrt{-\alpha \mu}$  pour  $x_- = -a$  et  $\lambda = f'(x_+) = -2\sqrt{-\alpha \mu}$  pour  $x_+ = a$ . On peut donc affirmer que l'équilibre  $x_-$  est instable et que l'équilibre  $x_+$  est stable.

Une méthode graphique pour la détermination de la stabilité des équilibres d'un système dynamique à un seul degré de liberté consiste à tracer la fonction  $f(x)$ .

Ses zéros correspondent aux équilibres et les pentes en ces points indiquent leur stabilité : stable si la pente est négative, instable si la pente est positive.

### 1.3 Cas $\alpha > 0$ et diagrammes de bifurcation

L'examen du cas  $\alpha > 0$  est identique. L'ensemble des solutions est  $\{-a, a\}$  pour  $\mu < 0$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$ , le singleton  $\{0\}$  pour  $\mu = 0$  et l'ensemble vide  $\emptyset$  pour  $\mu > 0$ . On calcule  $\lambda = f'(x_-) = -2\sqrt{-\alpha\mu}$  pour l'équilibre  $x_- = -a$  et  $\lambda = f'(x_+) = 2\sqrt{-\alpha\mu}$  pour  $x_+ = a$ . On peut donc affirmer que l'équilibre  $x_-$  est stable et que l'équilibre  $x_+$  est instable.

On peut rassembler tous ces résultats en traçant deux diagrammes de bifurcation. Pour  $\alpha < 0$ , on trace d'abord les courbes des solutions  $x_e(\mu)$  dans un plan  $(\mu, x)$  (parabole orientée vers les  $\mu$  positifs). Par convention, on trace en trait plein la courbe des équilibres stables, ici  $x_+(\mu)$ , et en traits pointillés la courbe des équilibre instables, ici  $x_-(\mu)$ . Pour un  $\mu$  fixé, il est alors facile de tracer les trajectoires. Celles-ci s'écartent des points instables pour converger vers les points stables. On trace donc des droites dirigées vers les  $x > 0$  pour  $\mu \leq 0$ . Pour  $\mu > 0$  on trace des demi-droites allant de  $-\infty$  à  $x_-$ , des segments de droites allant de  $x_-$  à  $x_+$ , puis des demi-droites allant de  $x_+$  à  $+\infty$ .

Pour  $\alpha > 0$ , on trace un nouveau diagramme de bifurcation ayant l'allure suivante. Pour  $\mu < 0$ , on trace des demi-droites allant de  $-\infty$  à  $x_-$ , des segments de droites allant de  $x_-$  à  $x_+$ , puis des demi-droites allant de  $x_+$  à  $\infty$ . Pour  $\mu \geq 0$  on trace des droites allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

On remarque que l'on passe du cas  $\alpha < 0$  au cas  $\alpha > 0$  en changeant  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $t \rightarrow -t$  et  $x \rightarrow x$  ou bien encore en changeant  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $t \rightarrow t$  et  $x \rightarrow -x$ . Ces symétries sont visibles en comparant les diagrammes de bifurcations et le sens des trajectoires, ou encore le tracé des diverses fonctions  $x(t)$  en fonction du temps.

Cette étude montre que la valeur  $\mu = 0$  correspond à un changement du nombre d'équilibres. Pour cette valeur du paramètre de contrôle, un équilibre stable et un équilibre instable se rejoignent. On parle alors de bifurcation "noeud-col" (saddle-node en anglais).

## 2 Bifurcation fourche

On considère maintenant l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3. \quad (3.10)$$

On cherche à tracer le diagramme de bifurcation de ce système dynamique. On note dès à présent la symétrie  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $t \rightarrow -t$ ,  $x \rightarrow -x$ . Une autre symétrie est obtenue en ne modifiant pas les paramètres de contrôle ni le sens de l'axe des temps. Cette symétrie est la symétrie point  $x \rightarrow -x$  dans  $\mathbb{R}$



et l'on voit que si  $x(t)$  est une solution, la fonction  $y(t) = -x(t)$  est aussi une solution. Cette symétrie particulière joue un rôle très important pour la bifurcation fourche, comme nous allons le voir.

### 2.1 Diagramme de bifurcation

On considère tout d'abord le cas  $\alpha < 0$ . L'ensemble des équilibres est obtenu en cherchant les racines de l'équation  $f(x_e) = \mu x_e + \alpha x_e^3 = 0$ . Cet ensemble est  $\{0\}$  pour  $\mu \leq 0$  et  $\{-a, 0, a\}$  avec  $a = \sqrt{\mu/\alpha}$  pour  $\mu > 0$ . La stabilité de 0 dépend du signe de  $f'(0) = \mu$ . Pour  $\mu < 0$  l'équilibre 0 est stable, il est instable pour  $\mu > 0$ .

La stabilité de  $x_- = -a$  est la même que celle de  $x_+ = a$  dans la mesure où  $f'(x_-) = f'(x_+) = -2\mu$ . Pour  $\mu > 0$ , c'est-à-dire lorsqu'ils existent, ces équilibres sont stables. On trace alors le diagramme de bifurcation correspondant à ce cas  $\alpha < 0$ . Pour  $\mu < 0$ , deux trajectoires (demi-droites) venant respectivement de  $-\infty$  et  $+\infty$  convergent le point d'équilibre  $x = 0$ . Pour  $\mu > 0$  deux trajectoires (segments de droites) s'écartent de  $x = 0$  pour converger respectivement vers  $x_- = -a$  et  $x_+ = a$ , et deux trajectoires (demi-droites) s'écartent respectivement de ces équilibres pour converger vers  $-\infty$  et  $+\infty$ . Le nombre d'équilibre et leur stabilité peuvent se voir graphiquement en traçant la fonction  $f(x) = F(\mu, \alpha; x)$  lorsque  $\mu$  est négatif ou positif.

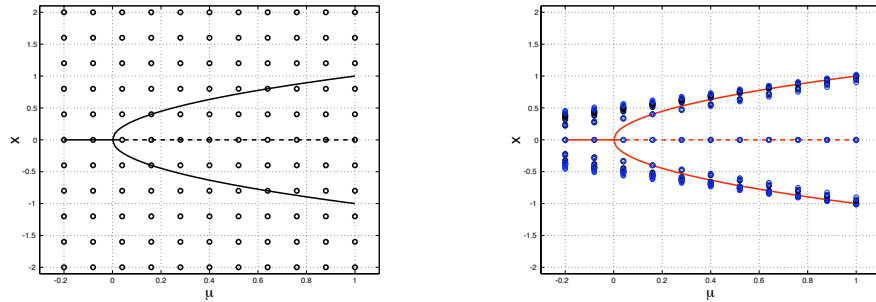


Figure 3.3: Diagramme  $(\mu, x)$  de la bifurcation fourche. a) Conditions initiales  $[\mu, x(0)]$  répartie régulièrement. b) Positions des points  $[\mu, x(t)]$  au bout du temps  $t$ .

Dans le cas  $\alpha > 0$ , l'ensemble des équilibres est  $\{-a, 0, a\}$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$  pour  $\mu < 0$  et  $\{0\}$  pour  $\mu \geq 0$ . La stabilité de l'équilibre  $x = 0$  est la même que pour le cas  $\alpha < 0$  : stable pour  $\mu < 0$  et instable pour  $\mu > 0$ . La stabilité de  $x_- = -a$  et  $x_+ = a$  dépend du signe de  $f'(x_-) = f'(x_+) = -2\alpha\mu$  : ces deux équilibres sont instables sur leur domaine d'existence  $\mu < 0$ . Pour  $\mu < 0$ , le diagramme de bifurcation fait apparaître deux trajectoires (demi-droites) allant respectivement de  $-a$  à  $-\infty$  et de  $+a$  à  $+\infty$  ainsi qu'une trajectoire (segment

de droite) allant de  $-a$  à  $+a$ . Pour  $\mu > 0$ , deux trajectoires s'écartent de l'équilibre  $x = 0$  pour aller respectivement vers  $-\infty$  ou  $+\infty$ .

## 2.2 Brisure de symétrie

On dit que la bifurcation est supercritique dans le cas  $\alpha < 0$  et sous-critique (ou subcritique) dans le cas  $\alpha > 0$ . Dans le cas supercritique, l'état d'équilibre  $x = 0$  se déstabilise lorsque  $\mu$  devient positif pour donner naissance à deux états d'équilibre symétriques dans l'amplitude  $a$  croît progressivement avec  $\mu$  comme  $\sqrt{\mu}$ . Dans le cas sous-critique, une perturbation d'amplitude finie avant le seuil de déstabilisation de l'équilibre  $x = 0$  peut conduire à une trajectoire divergente si cette perturbation est suffisamment grande.

La symétrie point  $S : x \rightarrow -x$  joue un rôle important dans cette bifurcation. On rappelle que si  $x(t)$  est une solution la fonction  $y(t) = Sx(t) = -x(t)$  est aussi solution. En écrivant le système dynamique sous la forme  $\dot{x} = f(x)$ , l'invariance de ce système par la symétrie  $S$  s'écrit  $S\dot{x}(t) = f[Sx(t)] = Sf[x(t)]$ . On remarque que l'équilibre  $x = 0$  est invariant par la symétrie ( $S0 = 0$ ) et que les équilibres bifurqués sont deux à deux symétriques ( $Sx_- = x_+$  et  $Sx_+ = x_-$ ).

Dans le cas général d'un système dynamique  $\dot{X} = F(X)$ , on dit que l'opérateur linéaire  $\underline{S}$  est une symétrie du système si  $F(\underline{S}X) = \underline{S}F(X)$  pour tout vecteur d'état  $X \in \mathbb{R}^n$  de l'espace des phases. Par définition  $\underline{S}$  est une matrice  $n \times n$  vérifiant  $\underline{S}\underline{S} = I$  (identité). Cette définition entraîne que si  $X(t)$  est solution, alors  $\underline{S}X(t)$  est aussi solution. Un équilibre  $X_e$  est invariant par la symétrie si  $\underline{S}X_e = X_e$ . En changeant l'origine de l'espace des phase, on peut toujours se ramener au cas  $X_e = 0$ , ce que nous supposons ici.

Lorsque l'équilibre symétrique  $X_e = 0$  se déstabilise, il peut donner naissance à de nouveaux équilibres qui sont eux-mêmes symétriques. Dans ce cas, il n'y a pas brisure de symétrie. Lorsqu'il y a brisure de symétrie, les équilibres bifurqués forment des paires  $(X_-, X_+)$  telles que  $\underline{S}X_- = X_+$  et  $\underline{S}X_+ = X_-$ . Dans les cas génériques, une seule paire de telles solutions prend naissance à la bifurcation, et par symétrie,  $X_e = 0$  reste un équilibre, devenu instable. On montre que la brisure de symétrie dépend du vecteur propre l'opérateur linéaire décrivant l'évolution des petites perturbations autour de  $X_e = 0$ , associé à la valeur propre qui s'annule à la bifurcation. Lorsque ce vecteur propre est invariant par  $\underline{S}$ , la symétrie n'est pas brisée. Elle l'est dans le cas contraire.

## 3 Bifurcation de Hopf

On considère maintenant l'équation différentielle ordinaire complexe suivante :

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z + (\alpha + i\beta)|z|^2z \quad (3.11)$$

où  $z \in \mathcal{C}$  est une variable complexe. En posant  $z = x + i y$ , on se ramène à un système dynamique à deux degrés de liberté. L'espace des phases est de dimension 2, tandis que l'espace de contrôle décrivant les paramètres  $\mu$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  est de dimension 4.

Très souvent, on s'intéresse à la partie réelle des solutions complexes  $z(t)$  de cette équation. Ces amplitudes complexes sont par exemple la projection d'un état sur un vecteur propre associé à une valeur propre complexe ( $\mu + i\omega$ ). On cherche à décrire le diagramme de bifurcation de ce système.

### 3.1 Déstabilisation de l'équilibre

En posant  $z(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$  avec  $\rho(t) > 0$ , le système s'écrit

$$\dot{\rho} = \mu \rho + \alpha \rho^3 \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \omega + \beta \rho^2. \quad (3.12)$$

On remarque que l'évolution du module  $\rho(t)$  est découplée de celle de  $\theta(t)$  et que son étude a déjà été réalisée lors de l'étude de la bifurcation fourche. L'évolution de la phase  $\theta(t)$  dépend alors de celle de  $\rho(t)$  de manière simple. On peut alors tracer les diagrammes de bifurcation de la bifurcation de Hopf à la lumière des diagrammes de bifurcation de la bifurcation fourche. Ces nouveaux diagrammes peuvent être représentée dans l'espace tridimensionnel  $(\mu, x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont les parties réelles et imaginaires de  $z$ . Pour  $\mu$  fixé, les trajectoires parcourent donc des courbes dans un espace de dimension 2 que l'on peut voir comme  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathcal{C}$ .

Pour  $\mu < 0$ , l'équilibre stable  $\rho = 0$  de la bifurcation fourche, correspond à un équilibre stable  $z = 0$ . La décomposition polaire  $z = \rho \exp(i\theta)$  n'est pas valable pour cet équilibre même (la phase est indéterminée) mais reste pertinente dans tout voisinage. Cet équilibre devient donc instable pour  $\mu > 0$ . On peut retrouver directement ce résultat en remarquant que le système s'écrit

$$\dot{z} = (\mu + i\omega) z + O(|z|^3) \quad (3.13)$$

lorsque  $z$  est petit, c'est-à-dire proche de l'équilibre  $z = 0$ . L'intégration du système linéarisé conduit alors à  $z(t) = z(0) \exp(\mu t) \exp(i\omega t)$ . On voit que  $|z(t)| = \exp(\mu t)$  tend vers zéro pour  $\mu < 0$  et ne reste pas petit  $\mu > 0$ . Dans le voisinage de zéro, les trajectoires forment alors des spirales logarithmiques de raison  $\mu$  et de pulsation  $\omega$ . Ces spirales convergent vers 0 dans le cas stable, ou divergent à partir de 0 dans le cas instable.

### 3.2 Diagramme de bifurcation

Considérons tout d'abord le cas supercritique  $\alpha < 0$ . Pour  $\mu < 0$ , les modules  $\rho(t)$  des trajectoires vont de  $-\infty$  vers 0. La vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega + \beta \rho^2$  est très rapide à l'infini et se stabilise à  $\omega$  lorsque les trajectoires arrivent dans

le voisinage de zéro. Si cette vitesse angulaire garde le même signe de l'infini à  $\omega$ , les trajectoires dans  $\mathcal{C}$  ont l'allure de spirales tournant toutes dans le même sens.

Pour  $\mu > 0$ , L'équilibre stable  $\rho_e = a$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$  correspond à une trajectoire périodique stable  $z(t) = a \exp(i\omega_e t)$  avec  $\omega_e = \omega + \beta a^2$ . Cette trajectoire décrit un cercle dans la mesure où le module est constant. Si l'on perturbe cette solution en considérant une condition initiale dans le voisinage proche de la trajectoire périodique, la petite perturbation ainsi introduite convergera vers zéro. On dit que cette trajectoire période est un "cycle limite", ce mot étant synonyme de stabilité.

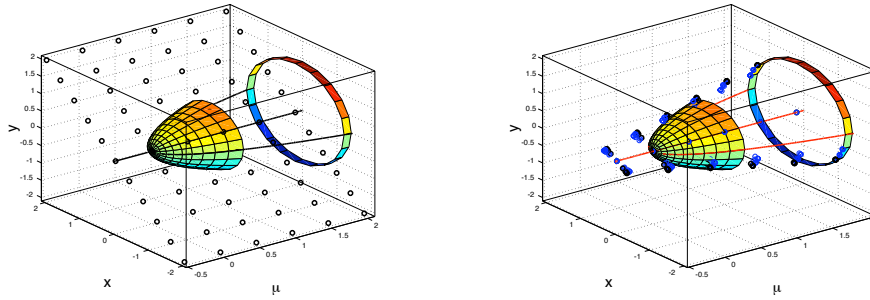


Figure 3.4: Diagramme  $(\mu, x)$  de la bifurcation de Hopf. a) Conditions initiales  $[\mu, x(0)]$  répartie régulièrement. b) Positions des points  $[\mu, x(t)]$  au bout du temps  $t$ .

Le module  $\rho$  des autres trajectoires va de 0 à  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$  ou de  $a$  à l'infini. Dans le premier cas, ces trajectoires décrivent des spirales divergente autour de zéro et qui approchent exponentiellement le cycle limite par l'intérieur. Dans le second cas, ces trajectoires décrivent des spirales venant de l'infini et convergeant vers le cycle limite par son extérieur.

Le cas sous-critique  $\alpha > 0$  conduit au diagramme de bifurcation suivant. Pour  $\mu < 0$ , il existe un trajectoire période  $z(t) = a \exp(i\omega_e t)$ , mais celle-ci est instable. Une perturbation vers l'intérieur du cercle donne naissance à une spirale qui convergent vers zéro. Une perturbation à l'extérieur du cercle conduit à une spirale tendant vers l'infini. Pour  $\mu > 0$ , les trajectoires sont des spirales s'écartant de 0 et convergeant vers l'infini.

## 4 Formes normales et catastrophes

Les systèmes dynamiques  $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$  et  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$  avec  $x \in \mathbb{R}$  ou  $\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z$  avec  $z \in \mathcal{C}$ , décrivent les trois bifurcations génériques de l'équilibre au sens qui a été défini dans l'introduction. Les bifurcations noeud-col et fourche correspondent à des instabilités stationnaires

tandis que la bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire. Plusieurs remarques peuvent être effectuées pour compléter l'étude de ces bifurcations.

### 4.1 Bifurcations imparfaites

Notons tout d'abord que la notion de généricité est relative à la classe de systèmes dynamiques accessibles en parcourant l'espace de contrôle. Pour la bifurcation fourche, on a supposé que le système était invariant par symétrie  $\underline{S}$  pour toutes les valeurs de l'espace de contrôle. Cette situation se rencontre souvent dans la nature où les symétries sont nombreuses. C'est justement la brisure de ces symétries (un équilibre bifurqué n'est plus symétrique mais le système dynamique lui-même reste symétrique) qui donne lieu à des bifurcations fourches. Les mathématiciens pourraient cependant prétendre que la bifurcation fourche n'est pas générique dans un espace de contrôle où l'on s'autorise à ce que le système dynamique lui-même ne soit plus symétrique. C'est le cas par exemple du système dynamique  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3 + \epsilon$ . Dans ce cas symétrie  $x \rightarrow -x$  n'est plus une symétrie du système dès que  $\epsilon$  est différent de zéro. On peut alors tracer des diagrammes de bifurcations dans le plan  $(\mu, x)$  pour  $\epsilon$  petit, et observer que la bifurcation fourche dégénère en une bifurcation noeud-col, proche d'une branche stable (cas super-critique) ou instable (cas sous-critique). On parle alors de bifurcation imparfaite.

### 4.2 Exposants critiques

Pour les trois bifurcations, l'amplitude des états bifurqués croît comme la racine carrée de l'écart au seuil. La théorie des formes normale, qui ramène les bifurcations génériques de l'équilibre à l'un de ces trois modèles, montre que cet exposant critique  $1/2$  est universel, c'est-à-dire indépendant du système dynamique étudié. Ce résultat est important lorsque l'on veut déterminer expérimentalement un seuil de bifurcation à partir de la mesure des amplitudes de l'état bifurqué (cas supercritique).

Un autre exposant critique universel concerne les temps caractéristiques de convergence vers un équilibre dans le cas stable ou de croissance exponentielle à partir de l'équilibre dans le cas instable. Ces temps varient comme l'inverse de l'écart au seuil, faisant ainsi apparaître l'exposant critique  $-1$ . La détermination de ce temps en fonction d'un paramètre de contrôle permet de mesurer expérimentalement un seuil de bifurcation, même dans le cas sous-critique.

### 4.3 Bifurcations sous-critiques et hysteresis

La théorie des formes normales indiquent que le comportement des trois systèmes dynamiques considérés pour décrire les bifurcations noeud-col, fourche et de Hopf, est universel dans le voisinage des équilibres obtenus pour des systèmes dynamiques quelconques et pour des valeurs des paramètres proches du seuil. Les trajectoires qui tendent vers l'infini pour les formes normales peuvent converger vers d'autres équilibres ou régimes pour le système dynamiques que l'on souhaite étudier. Cette situation se rencontre en particulier pour les bifurcations fourche ou de Hopf sous-critiques, pour lesquelles il n'existe pas de nouvel équilibre une fois l'équilibre initial déstabilisé.

On peut donner des exemples de telles situations à l'aide de systèmes dynamiques simples dont l'universalité n'est pas comparable à celle des trois formes normales que l'on a étudié. Considérons par exemple le système dynamique réel

$$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3 + \gamma x^5 \quad (3.14)$$

avec  $x \in \mathbb{R}$  et le système dynamique complexe

$$\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z + (\gamma + i\delta) |z|^4 z \quad (3.15)$$

avec  $z \in \mathcal{C}$ . Dans le cas sous-critique  $\alpha > 0$  on observe un phénomène d'hysteresis. Lorsque  $\mu$  devient positif, une petite perturbation de l'équilibre 0 devenu instable s'amplifie pour converger vers un nouveau régime (équilibre ou cycle limite) d'amplitude finie dès le seuil (à condition que  $\gamma$  soit négatif). Ce nouveau régime stable persiste lorsque l'on diminue le paramètre de contrôle  $\mu$ , même en-deçà du seuil de la bifurcation. En continuant à diminuer  $\mu$ , régime subit une bifurcation saddle-node (d'équilibres ou de cycles) et le système retombe vers l'équilibre stable 0. On a ainsi décrit un cycle d'hysteresis et il existe une gamme de valeurs du paramètre  $\mu$  pour laquelle deux régimes stables coexistent. Dans ce cas la position de la condition initiale dans l'un ou l'autre des bassins d'attraction des deux régimes conditionne l'état asymptotique du système.

### 4.4 Théorème des fonctions implicites et catastrophes

La recherche des équilibres d'un système dynamique  $\dot{x} = f(x) = F(\underline{\mu}; x)$  conduit la résolution de l'équation implicite  $F(\underline{\mu}; x_e) = 0$ . Le théorème des fonctions implicite indique que l'on peut prolonger une courbe solution  $x_e(\mu)$  tant que  $\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{\mu}; x_e) = f'(x_e) \neq 0$ . Les valeurs critiques  $\underline{\mu}_c$  telles que  $\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{\mu}; x_e) = f'(x_e) = 0$  correspondent à des bifurcations où le nombre d'équilibre change. L'analyse de stabilité de l'équilibre  $x_e$  du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  faisant intervenir le signe de  $f'(x_e)$ , il est donc normal qu'un changement de stabilité soit accompagné d'un changement dans le nombre d'équilibres. C'est le cas

de la bifurcation noeud-col et de la bifurcation fourche. Dans le cas de la bifurcation de Hopf, le théorème des fonctions implicites n'est pas violé sur la recherche des équilibres  $z = x + iy$ . Il l'est pour la recherche équilibres pour le module  $\rho$  en posant  $z = \rho \exp(i\theta)$ .

L'étude systématique des cas de violation du théorème des fonctions implicites et de leur voisinage dans l'espace de contrôle fait l'objet de la théorie des catastrophes. La catastrophe la plus simple est la pli, représenté par sa forme normale  $F(\mu; x_e) = \mu + \alpha x_e^2$ . En variant un seul paramètre, on passe de zéro à deux solutions. C'est ce qui se passe pour les équilibres de la bifurcation noeud-col. Par rapport à l'étude des catastrophes, qui ne s'intéresse qu'aux équilibres, l'analyse dynamique apporte des informations sur la stabilité de ces équilibres.

#### 4.5 Catastrophes de codimension 2 : la fronce

Il est intéressant ici d'étudier, à titre d'exemple, un système dynamique faisant apparaître la catastrophe de dimension 2 qu'est la fronce. Une fronce est l'intersection de deux plis dans l'espace de contrôle. Nous considérons donc le système dynamique

$$\dot{x} = F(p, q; x) = f(x) = -q + px - x^3 \quad (3.16)$$

dont l'espace de contrôle est l'ensemble des couples  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ . Considérons tout d'abord des chemins dans l'espace de contrôle où  $p$  est maintenu constant et où  $q$  décrit l'espace réel. Si  $p < 0$ , il n'existe qu'un seul équilibre comme le montre le tracé de la courbe  $f(x) = -q + px - x^3$ . Cet équilibre est alors stable car la dérivée  $f'(x) = p - 3x^2$  est négative. Si  $p > 0$ , le tracé de la courbe  $f(x)$  fait apparaître deux extrema égaux à  $-q \pm 2(p/3)^{3/2}$ . Si  $|q| < 2(p/3)^{3/2}$ , c'est-à-dire  $q^2 < 4p^3/27$ , il existe trois équilibres, un qui est instable entouré de deux qui sont stables. Dans ce cas, le diagramme de bifurcation ( $p$  fixe,  $q$  variable) fait apparaître deux bifurcations noeud-col pour les valeurs critiques  $q = 2(p/3)^{3/2}$  et  $q = -2(p/3)^{3/2}$ . On note aussi un phénomène d'hysteresis : en suivant un équilibre lorsque  $q$  varie, le système bascule brutalement vers l'autre équilibre lorsque le seuil de la bifurcation noeud-col est dépassé. En faisant alors varier le paramètres dans l'autre sens, on retourne à l'équilibre stable initial mais en dépassant l'autre seuil de bifurcation. Ainsi, pour une valeur de  $q$  située entre les deux seuils, on peut atteindre deux équilibres stables selon la condition initiale ou le chemin suivi dans l'espace de contrôle. On résume cette analyse en traçant la courbe  $27q^2 - 4p^3$  dans l'espace de contrôle  $(p, q)$ . Cette courbe fait apparaître un point de rebroussement au voisinage de  $(p, q) = \underline{0}$ . On peut aussi tracer la courbe  $F(p, q, x_e) = 0$  dans l'espace  $(p, q, x_e)$ . Cette visualisation, que l'on peut essayer de matérialiser en déformant convenablement une feuille de papier, donne le nom de fronce à

cette catastrophe de codimension 2. Notant pas ailleurs que des chemins  $q$  fixé et  $p$  variable produisent une bifurcation fourche dans le cas particulier  $q = 0$  et des bifurcations fourches imparfaites dans le voisinage de cette valeur.

La théorie des catastrophes combinée à la théorie des formes normales montre que cette description qualitative, ainsi que l'exposant critique  $3/2$  du point de rebroussement dans l'espace de contrôle, sont des caractéristiques universelles des systèmes pour lesquels deux bifurcations noeud-cols se coupent dans l'espace de contrôle. La portée de ce résultat explique certainement le succès de la théorie des catastrophes dans l'étude des systèmes physiques.

## Conclusion

Nous avons étudié en détail trois équations modèles des bifurcations noeud-col ( $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$ ), fourche ( $\dot{x} = \mu x + \alpha x^2$ ) et de Hopf ( $\dot{z} = (\mu + i\omega)z + (\alpha + i\beta)|z|^2 z$ ).

Les bifurcations noeud-col et de Hopf sont génériques dans l'ensemble des systèmes dynamiques quelconques (sans symétrie) de  $\mathbb{R}^n$  dès lors que l'on s'intéresse à la stabilité d'un équilibre en faisant varier un paramètre. Ceci signifie que, sur une surface de codimension un dans l'espace des paramètres de contrôles, un équilibre stable se déstabilisera en suivant le diagramme de bifurcation de l'une des ces deux bifurcations. Pour déterminer laquelle, il faut linéariser le système dynamique autour de l'équilibre et analyser les valeurs propres de la matrice jacobienne ainsi obtenu. En faisant varier un paramètre de contrôle, l'équilibre se déstabilise par passage d'une valeur propre à travers l'axe des imaginaires purs. S'il s'agit d'une valeur propres réelles, on est en présence d'une bifurcation noeud-col. S'il s'agit d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées, on est en présence d'une bifurcation de Hopf.

La bifurcation fourche est générique dans l'ensemble des systèmes dynamiques invariant par une symétrie  $\underline{S}$  de  $\mathbb{R}^n$  lorsque l'on suit un équilibre lui-même invariant par cette symétrie. Cette bifurcation correspond alors à une brisure de symétrie et correspond au changement de signe d'une valeur propre réelle. Les trois équations modèles décrivant les trois bifurcations générique de l'équilibre sont en fait l'ordre dominant d'un développement asymptotique au voisinage des seuils de changement de stabilité. On dit que ces équations sont les "formes normales" des ces trois bifurcations. On montre alors que la topologie des trajectoires du système complet au voisinage des équilibres est la même que celle des formes normales.



## FORMULAIRE

SYSTÈMES DYNAMIQUES	
<b><math>N</math> degrés de liberté</b>	$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X})$
avec $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^m$ .	
<b>Un degré de liberté</b>	$\dot{x} = f(x) = F(\underline{\mu}; x)$
<b>Stabilité</b>	
Équilibre $x_e$ avec $f(x_e)$ stable ssi $\mu = f'(x_e) < 0$ .	
BIFURCATIONS GÉNÉRIQUES	
<b>Bifurcation noeud-col</b>	$\dot{x} = \mu + \alpha x^2$
<b>Bifurcation fourche</b>	$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$
<b>Bifurcation de Hopf</b>	$\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta)  z ^2 z$

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### EXERCICE 3.1 Bifurcation noeud-col analytique

On peut donner l'expression analytique des solutions  $x(t)$  du système dynamique  $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$  décrivant la bifurcation noeud-col. Le tracé préalable des diagrammes de bifurcation permet d'éclairer la discussion en fonction des valeurs des paramètres lors du calcul analytique.

- 1) Donner l'expression analytique des solutions dans le cas  $\alpha\mu > 0$ .
- 2) Donner l'expression analytique des solutions dans le cas  $\alpha\mu < 0$ .
- 3) Vérifier que les diagrammes de bifurcation obtenus pour  $\alpha\mu < 0$  ou  $\alpha\mu > 0$  correspondent bien au comportement des solutions analytiques.

*Corrigé page 100*

### EXERCICE 3.2 Bifurcation fourche analytique

Comme pour le cas de la bifurcation noeud-col, il est intéressant de considérer les solutions analytiques du système dynamique  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$ , décrivant la bifurcation fourche, à la lumière des diagrammes de bifurcations qui donnent

le comportement asymptotique a priori des solutions.

- 1) Donner l'expression analytique des solutions dans le cas  $\alpha\mu > 0$ .
- 2) Donner l'expression analytique des solutions dans le cas  $\alpha\mu < 0$ .
- 3) Vérifier que les diagrammes de bifurcation obtenus pour  $\alpha\mu < 0$  ou  $\alpha\mu > 0$  correspondent bien au comportement des solutions analytiques.

Corrigé page 102

### **EXERCICE 3.3** Travelling or Standing waves

On s'intéresse à des solutions d'un modèle 1D qui s'écrivent sous la forme :

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left[ z_1(t) e^{i k_1 x} + z_2(t) e^{-i k_1 x} \right] \quad (3.17)$$

où  $\operatorname{Re}$  désigne la partie réelle. On suppose que les amplitudes complexes  $z_1$  et  $z_2$  vérifient le système :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (\mu + i\omega) z_1 - (\alpha + i\beta) |z_1|^2 z_1 - (\gamma + i\delta) |z_2|^2 z_1 \\ \dot{z}_2 &= (\mu + i\omega) z_2 - (\alpha + i\beta) |z_2|^2 z_2 - (\gamma + i\delta) |z_1|^2 z_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

On suppose que  $\mu > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

- 1) Montrer que l'étude de ce système peut se ramener, sans perte de généralité, à celle du système réel :

$$\dot{R}_1 = R_1 - (R_1^2 + \nu R_2^2) R_1 \quad \text{et} \quad \dot{R}_2 = R_2 - (R_2^2 + \nu R_1^2) R_2, \quad (3.19)$$

avec  $R_1 \geq 0$ ,  $R_2 \geq 0$  et  $\nu > 0$ .

- 2) On s'intéresse aux solutions stationnaires telles que  $R_2 = 0$ . Calculer la valeur d'équilibre  $R_1 = R_{tw}$ .
- 3) Dans le cas où  $(R_1, R_2) = (R_{tw}, 0)$ , décrire l'évolution spatio-temporelle de la fonction  $u(x, t)$  correspondante. Illustrer cette description à l'aide de quelques tracés schématiques.
- 4) On s'intéresse aux solutions stationnaires telles que  $R_1 = R_2 = R_{sw}$ . Calculer la valeur d'équilibre  $R_{sw}$ .
- 5) Dans le cas où  $(R_1, R_2) = (R_{sw}, R_{sw})$ , décrire l'évolution spatio-temporelle de la fonction  $u(x, t)$  correspondante. Illustrer cette description à l'aide de quelques tracés schématiques.
- 6) On s'intéresse aux petites perturbations autour de l'un des trois équilibres  $(R_{tw}, 0)$ ,  $(0, R_{tw})$  et  $(R_{sw}, R_{sw})$ . Écrire le système linéarisé autour de l'un quelconque de ces équilibres.
- 7) Calculer la valeur critique  $\nu = \nu_c$  au-delà de laquelle les régimes "ondes propagatives" et "onde stationnaire" de la fonction  $u(x, t)$  échangent leur stabilité.

Corrigé page 102

## CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

**Corrigé 3.1** Bifurcation noeud-col analytique

1) Le premier cas est obtenu pour  $\alpha\mu > 0$ , c'est-à-dire  $\alpha < 0$  avec  $\mu < 0$  ou  $\alpha > 0$  avec  $\mu > 0$ . Dans ces deux cas, l'ensemble des équilibres est vide. On s'attend donc à des solutions  $x(t)$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$  ou de  $+\infty$  à  $-\infty$ . Dans ce cas, on pose  $b = \sqrt{\mu/\alpha}$  et le système s'écrit

$$\dot{x} = \mu + \alpha x^2 = \mu \left[ (x/b)^2 + 1 \right] . \quad (3.20)$$

On en déduit que  $\arctg(x/b) = \mu b t + \arctg(x_0/b)$  où  $x(0) = x_0$  est la condition initiale. La solution s'écrit alors

$$\frac{x(t)}{b} = \operatorname{tg} \left[ \frac{\mu}{b} t + \arctg \left( \frac{x_0}{b} \right) \right] = \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\mu}{b} t \right) + \frac{x_0}{b}}{1 - \frac{x_0}{b} \operatorname{tg} \left( \frac{\mu}{b} t \right)} . \quad (3.21)$$

On peut voir l'ensemble des solutions comme étant la famille des courbes

$$x(t) = b \operatorname{tg} \left[ \frac{\mu}{b} (t - t_0) \right] \quad (3.22)$$

où  $t_0$  est un réel quelconque, c'est-à-dire l'ensemble des translatées en temps de la courbe particulière  $b \operatorname{tg} \left( \frac{\mu}{b} t \right)$ . Par rapport à la condition initiale  $x(0) = x_0$ , à  $t = 0$  on a  $t_0 = -(b/\mu) \arctg(x_0/b)$ . Ces trajectoires vont de  $-\infty$  à  $+\infty$  pour  $\mu > 0$  (et donc  $\alpha < 0$ ) et de  $+\infty$  à  $-\infty$  pour  $\mu < 0$  (et donc  $\alpha > 0$ ). On note d'autre part que les trajectoires mettent un temps fini  $T = \pi b/\mu$  pour relier les deux infinis.

2) Le second cas est obtenu pour  $\alpha\mu < 0$ , c'est-à-dire  $\alpha < 0$  avec  $\mu > 0$  ou  $\alpha > 0$  avec  $\mu < 0$ . Dans ces deux cas, l'ensemble des équilibres est  $\{-a, a\}$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$ . On s'attend donc à des solutions  $x(t)$  allant de  $-\infty$  à  $a$ , de  $-a$  à  $a$  ou de  $a$  à  $+\infty$ . Dans ce cas, le système s'écrit

$$\dot{x} = \mu + \alpha x^2 = \alpha(x - a)(x + a) . \quad (3.23)$$

Une décomposition en éléments simples permet d'écrire cette équation sous la forme

$$\frac{1}{2\alpha a} \left( \frac{\dot{x}}{x - a} - \frac{\dot{x}}{x + a} \right) = 0 . \quad (3.24)$$

L'intégration en temps conduit au logarithme d'une valeur absolue qui conduit à l'expression

$$\frac{x - a}{x + a} = \frac{x_0 - a}{x_0 + a} e^{2\alpha a t} = \frac{x_0 - a}{x_0 + a} e^{-2\frac{\mu}{a} t} \quad (3.25)$$

en remarquant que  $\alpha a = \mu/a$ . On en déduit la solution

$$\frac{x(t)}{a} = \frac{\frac{x_0}{a}(e^{2\frac{\mu}{a}t} + 1) + (e^{2\frac{\mu}{a}t} - 1)}{\frac{x_0}{a}(e^{2\frac{\mu}{a}t} - 1) + (e^{2\frac{\mu}{a}t} + 1)} \quad (3.26)$$

En effectuant quelques transformations, la solution s'écrit finalement

$$x(t) = a \frac{\frac{x_0}{a} - \operatorname{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)}{1 - \frac{x_0}{a} \operatorname{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)}. \quad (3.27)$$

On peut classer ces solutions en trois familles. Si  $x_0 \in [-a, a]$ , la solution  $x(t)$  issue de cette condition initiale appartient à la famille des courbes

$$x(t) = -a \operatorname{th}\left[\frac{\mu}{a}(t - t_0)\right] \quad (3.28)$$

où  $t_0$  est un réel quelconque, c'est-à-dire l'ensemble des translatées en temps de la courbe particulière  $-a \operatorname{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)$ . Par rapport à la condition initiale  $x(0) = x_0$  à  $t = 0$  on a  $t_0 = (a/\mu) \operatorname{argth}(x_0/a)$ . Ces trajectoires vont de  $-a$  à  $+a$  pour  $\mu > 0$  (et donc  $\alpha > 0$ ) et de  $+a$  à  $-a$  pour  $\mu < 0$  (et donc  $\alpha < 0$ ).

Si  $x_0 > a$  ou  $x_0 < -a$ , les solution  $x(t)$  issues de ces deux types de conditions initiales appartiennent à la famille des courbes

$$x(t) = -a \operatorname{th}\left[\frac{\mu}{a}(t - t_0)\right] \quad (3.29)$$

avec  $t > t_0$  si  $x_0 > a$  et  $t < t_0$  pour  $x_0 < -a$ . Comme  $t_0$  est un réel quelconque, ces courbes sont l'ensemble des translatées en temps de la courbe particulière  $-a \operatorname{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)$ . Par rapport à la condition initiale  $x(0) = x_0$  à  $t = 0$  on a  $t_0 = -(a/\mu) \operatorname{argth}(a/x_0)$ . Ces trajectoires vont de  $+\infty$  à  $+a$  ou de  $-a$  à  $-\infty$  pour  $\mu > 0$  (et donc  $\alpha < 0$ ) et de  $-\infty$  à  $-a$  ou de  $+a$  à  $+\infty$  pour  $\mu < 0$  (et donc  $\alpha > 0$ ). Pour ces trajectoires,  $t_0$  est aussi le temps fini qu'il faut pour atteindre l'infini à partir de la condition initial  $x_0$ .

**3)** On vérifie que les diagrammes de bifurcation obtenus pour  $\alpha\mu < 0$  ou  $\alpha\mu > 0$  correspondent bien au comportement des solutions analytiques qui vient d'être décrit.

### **Corrigé 3.2**

#### **Bifurcation fourche analytique**

**1)** Dans le cas  $\alpha\mu > 0$ , on sait que 0 est le seul équilibre et que les trajectoires joignent 0 et l'infini. On pose alors

$$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3 = \mu \frac{x}{b} \left( \frac{x^2}{b^2} + 1 \right) \quad (3.30)$$

avec  $b = \sqrt{\mu/\alpha}$ . Une décomposition en éléments simples permet d'écrire le système sous la forme

$$\frac{\dot{x}}{b} \left( \frac{1}{x/b} - \frac{x/b}{1 + x^2/b^2} \right) = \mu. \quad (3.31)$$

L'intégration de ce système conduit à des logarithmes de valeurs absolues puis à

$$\frac{x(t)}{b} = \frac{1}{\sqrt{(1 + b^2/x_0^2) \exp(-2\mu t) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\exp[-2\mu(t - t_0)] - 1}} \quad (3.32)$$

avec  $t_0 = \frac{1}{2\mu} \text{Ln}(1 + b^2/x_0^2)$ . Cette famille de trajectoires est constituée des translatées en temps des courbes  $x(t) = b/\sqrt{\exp(-2\mu t) - 1}$  définies pour  $t < 0$  lorsque  $\mu > 0$  (et donc  $\alpha > 0$ ) et pour  $t > 0$  lorsque  $\mu < 0$  (et donc  $\alpha < 0$ ). Ces trajectoires relient l'infini et l'état  $x_0$  en un temps fini égal à  $t_0$ . **2)** Dans le cas  $\alpha\mu < 0$ , on sait que l'ensemble des équilibres est  $\{-a, 0, a\}$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$ . On pose alors

$$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3 = \alpha(x + a)(x - a)x. \quad (3.33)$$

Une décomposition en éléments simples permet d'écrire le système sous la forme

$$\frac{\dot{x}}{x + a} + \frac{\dot{x}}{x - a} - 2\frac{\dot{x}}{a} = 2a^2\alpha. \quad (3.34)$$

En remarquant que  $a^2\alpha = -\mu$ , l'intégration de ce système conduit à des logarithmes de valeurs absolues puis à

$$\frac{x(t)}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{(a^2/x_0^2 - 1) \exp(-2\mu t) + 1}} \quad (3.35)$$

On n'étudie alors que le cas  $x(t) > 0$ , le cas  $x(t) < 0$  s'en déduisant par symétrie.

On peut classer ces solutions en deux familles. Pour  $|x_0| < a$  les solutions s'écrivent sous la forme

$$x(t) = b/\sqrt{\exp[-2\mu(t - t_0)] + 1} \quad (3.36)$$

avec  $t_0 = (1/2\mu) \text{Ln}(a^2/x_0^2 - 1)$ . Ce sont les translatées en temps de la trajectoire  $b/\sqrt{\exp(-2\mu t) + 1}$  qui est définie pour  $t \in \mathbb{R}$ . Ces trajectoires vont de 0 à  $a$  pour  $\mu > 0$  (et donc  $\alpha < 0$ ) et de  $a$  à 0 pour  $\mu < 0$  (et donc  $\alpha > 0$ ).

Pour  $|x_0| > a$  les solutions s'écrivent sous la forme

$$x(t) = b/\sqrt{1 - \exp[-2\mu(t - t_0)]} \quad (3.37)$$

avec  $t_0 = (1/2\mu)\text{Ln}(1 - a^2/x_0^2)$ . Ce sont les translatées en temps de la trajectoire  $b/\sqrt{1 - \exp(-2\mu t)}$  qui est définie pour  $t > 0$  si  $\mu > 0$  (et donc  $\alpha < 0$ ) et pour  $t < 0$  si  $\mu < 0$  (et donc  $\alpha > 0$ ). Ces trajectoire relie l'état  $x_0$  et l'infini en un temps qui est égal à  $t_0$ .

**3)** On vérifie que les diagrammes de bifurcation obtenus pour  $\alpha\mu < 0$  ou  $\alpha\mu > 0$  correspondent bien au comportement des solutions analytiques qui vient d'être décrit.

### **Corrigé 3.2** Travelling or Standing waves

**1)** Dans un premier temps, on pose  $z_l = \rho_l(t) e^{i\theta_l(t)}$  pour  $n = 1, 2$ . On obtient alors  $\dot{\rho}_l = \mu \rho_l - \alpha \rho_l^3 - \gamma \rho_m^2 \rho_l$  et  $\dot{\theta}_l = \omega - \beta \rho_l^2 - \delta \rho_l^2 \rho_m$ . On adimensionne les équations en posant  $t = t_n T$  et  $\rho_l = \rho_n R_l$  où  $t_n$  et  $\rho_n$  sont des unités arbitraire. En choisissant  $t_n = \mu$  et  $\rho_n = \sqrt{\mu/\alpha}$  et en posant  $\nu = \gamma/\alpha$ , on obtient les équations indiquées qui décrivent l'évolution des modules  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . L'évolution des phases  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en découle simplement. **2)** On a  $R_{tw} = 1$ . **3)** Ce cas correspond à une onde progative qui se déplace vers la droite (Travelling wave). **4)** On a  $R_{sw} = 1/\sqrt{1+\nu}$ . **5)** Ce cas correspond à une onde stationnaire (Standing wave). **6)** La jacobienne de l'application non linéaire autour d'un point  $(R_1, R_2)$  est donnée par la matrice  $\begin{pmatrix} 1 - 3R_1^2 - \nu R_2^2 & -2\nu R_1 R_2 \\ -2\nu R_1 R_2 & 1 - 3R_2^2 - \nu R_1^2 \end{pmatrix}$ . Cette matrice s'écrit  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 - \nu \end{pmatrix}$  autour de l'équilibre  $(R_{tw}, 0) = (1, 0)$  et  $\frac{1}{1+\nu} \begin{pmatrix} -2 & -2\nu \\ -2\nu & -2 \end{pmatrix}$  autour de l'équilibre  $(R_{sw}, R_{sw}) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}(1, 1)$ . Les valeurs propres des ces matrices sont respectivement  $(-2, 1 - \nu)$  et  $[-2(1 + \nu), -2(1 - \nu)]$ . **7)** Pour  $0 \leq \nu < 1$ , les ondes propagatives (tw) sont stables et les ondes stationnaires (sw) sont instables. C'est le contraire pour  $\nu > 1$ . On a donc  $\nu_c = 1$ .

## QUESTIONNAIRES À CHOIX MULTIPLES

### **QCM 3.1** Bifurcation noeud-col

1) Le système dynamique  $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$  pour  $\alpha < 0$  et  $\mu > 0$  admet

☐ A un équilibre stable et un équilibre instable

☐ B aucun équilibre

☐ C trois équilibres dont deux stables

2) Le système dynamique  $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$  pour  $\alpha < 0$  et  $\mu < 0$  admet

☐ A un équilibre stable et un équilibre instable

- ☐ B aucun équilibre
- ☐ C trois équilibres dont deux stables

3) Le système dynamique  $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$  pour  $\alpha > 0$  et  $\mu > 0$  admet

- ☐ A un équilibre stable et un équilibre instable
- ☐ B aucun équilibre
- ☐ C trois équilibres dont deux stables

### **QCM 3.2**    **Bifurcation fourche**

1) Le système dynamique  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$  pour  $\alpha < 0$  et  $\mu > 0$  admet

- ☐ A trois équilibres dont deux instables
- ☐ B aucun équilibre
- ☐ C trois équilibres dont deux stables

2) Le système dynamique  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$  pour  $\alpha < 0$  et  $\mu < 0$  admet

- ☐ A trois équilibres dont deux instables
- ☐ B un seul équilibre stable
- ☐ C trois équilibres dont deux stables

3) Le système dynamique  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$  pour  $\alpha > 0$  et  $\mu < 0$  admet

- ☐ A trois équilibres dont deux instables
- ☐ B un seul équilibre stable
- ☐ C trois équilibres dont deux stables

### **QCM 3.3**    **Bifurcation de Hopf**

1) Le système dynamique  $\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z$  pour  $\alpha < 0$  et  $\mu > 0$  admet

- ☐ A un équilibre instable et un cycle limite
- ☐ B un seul équilibre stable
- ☐ C un équilibre stable et un cycle instable

2) Le système dynamique  $\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z$  pour  $\alpha < 0$  et  $\mu < 0$  admet

- ☐ A un équilibre instable et un cycle limite

☐ B un seul équilibre stable

☐ C un équilibre stable et un cycle instable

3) Le système dynamique  $\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z$  pour  $\alpha > 0$  et  $\mu < 0$  admet

☐ A un équilibre instable et un cycle limite

☐ B un seul équilibre stable

☐ C un équilibre stable et un cycle instable

## CORRIGÉS DES QCM

**Réponses 3.1**    Bifurcation noeud-col

1)A 2)B 3)B

**Réponses 3.2**    Bifurcation fourche

1)C 2)B 3)A

**Réponses 3.3**    Bifurcation de Hopf

1)A 2)B 3)C



## BIBLIOGRAPHIE DE L'APM

- [1] P. BERGÉ, Y. POMEAU, Ch. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Hermmann (1984, 1988).
- [2] P. MANNEVILLE, *Structures dissipatives, chaos et turbulence*, Aléa Saclay (1991).
- [3] M. BENDER, S. A. ORSZAG, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, Mc Graw-Hill (1978).



## APM 4

# Systèmes dynamiques simples

### FICHE SIGNALÉTIQUE

Article Pédagogique Multimedia (APM)	
Titre :	Systèmes dynamiques simples
Auteur :	O. THUAL, INPT/ENSEEIH
Référence :	<i>APM-INPT thu-sysdyn</i> (2003)
Mois de création :	septembre 2003
Mise à jour :	November 14, 2009
Comité de lecture :	néant
URL multimedia :	<a href="http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/">http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/</a>
Niveau :	Master I ou II
Cours oral :	1h30 à 2h
Animations :	néant
Mots clés :	bifurcations, stabilité linéaire portraits de phase, oscillateurs

### OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

Cet article pédagogique est une introduction à l'étude des systèmes dynamiques simples, c'est-à-dire aux familles de trajectoires des systèmes d'équations différentielles ordinaires couplées. Plusieurs objectifs de formations sont visés :

- Assimiler la notion de stabilité d'un équilibre à partir de la linéarisation des équations.
- Comprendre la détermination de la topologie des trajectoires au voisinage de l'équilibre à partir du système linéarisé.

- Se familiariser avec l'étude paramétrique de la stabilité d'un équilibre en faisant varier un paramètre.
- Découvrir ou consolider un certain nombre de concepts de bases comme par exemple la définition des systèmes hamiltoniens.
- Explorer quelques approches asymptotiques comme la dérivation d'équations d'amplitudes à l'aide de la méthode des échelles multiples.
- Motiver l'exploration numériques de la dynamique d'un certain nombre de modèles simples issus de la physique.

Les compétences à acquérir lors de l'étude des cet article pédagogique sont les suivantes :

- Être capable de linéariser un système dynamique autour d'un équilibre, ce qui revient à calculer la jacobienne d'un champ de vecteurs.
- Être capable de décrire la topologie des trajectoires autour d'un équilibre en déterminant les valeurs propres et vecteurs propres de la jacobienne.
- Être capable de tracer le portrait de phase d'un système dynamique dépendant d'un potentiel.
- Connaître la définition d'un système dynamique hamiltonien ainsi que ses propriétés de base (conservation de l'énergie et des aires).
- Être capable de calculer une équation d'amplitude à l'aide de la méthode des échelles multiples.
- Être capable d'effectuer une exploration numérique d'un système dynamique quelconque à l'aide d'un schéma numérique simple.

## PRÉ-REQUIS

Le niveau requis pour la lecture de cette article pédagogique se situe autour de celui d'une Licence scientifique. La lecture de "l'Article Pédagogique Multimedia" intitulé "Bifurcations génériques de l'équilibre" peut être utile pour situer les bifurcations observées dans un cadre général. Elle n'est cependant pas indispensable.

## NOTATIONS

$a$	Notation pour $\sqrt{\mu/\alpha}$ ou $\sqrt{-\mu/\alpha}$
$A(t)$	Amplitude complexe

$(A, B, C)$	Composantes de $\underline{U}$ dans une base propre
$b$	Parmètre de contrôle du modèle de Lorenz
$\dot{x}(t)$	Dérivée de la fonction $x(t)$
$\underline{D}F(\underline{X})$	Jacobienne du champ de vecteur $\underline{F}(\underline{X})$
$\text{div}$	Opérateur divergence d'un champ de vecteur
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport à $t$
$\frac{\partial}{\partial T}$	Dérivée partielle par rapport à $T$
$\frac{\partial}{\partial q}$	Dérivée partielle par rapport à $q$
$\frac{\partial}{\partial p}$	Dérivée partielle par rapport à $p$
$E$	Énergie d'un système hamiltonien
$E_0$	Valeur constante de l'énergie
$f$	Constante pour le terme de forçage
$F$	Constante pour le terme de forçage
$\underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X})$	Fonction vectorielle quelconque
$g$	Gravité ( $\text{m s}^{-2}$ )
$\underline{G}(\underline{X})$	Champ de vecteur
$h$	Parmètre de contrôle
$H(q, p)$	Hamiltonien
$k$	Paramètre de contrôle
$\underline{L}(t)$	Matrice 2x2 à coefficients périodiques
$M$	Constante
$O(\epsilon)$	Du même ordre de grandeur que $\epsilon$
$p$	Variable de l'Hamiltonien $H(q, p)$
$\underline{p}$	Variables $p_i$ de l'Hamiltonien $H(\underline{q}, \underline{p})$
$q$	Variable de l'Hamiltonien $H(q, p)$
$\underline{q}$	Variables $q_i$ de l'Hamiltonien $H(\underline{q}, \underline{p})$
$q_e$	Valeur d'équilibre de $q$
$r$	Parmètre de contrôle du modèle de Lorenz
$r_c$	Valeur critique de $r$
$r_*$	Valeur critique de $r$
$r_d$	Valeur critique de $r$
$R$	Module de $Z(0)$
$\underline{R}$	Matrice 2x2
$s$	Valeur propre ( $s^{-1}$ )
$(s_a, s_b, s_c)$	Valeurs propres ( $s^{-1}$ )
$s_a^{(+)}, s_b^{(+)}, s_c^{(+)}$	Valeurs propres pour $\underline{X}^{(+)}$ ( $s^{-1}$ )
$S$	Symétrie point $x \rightarrow -x$
$\underline{S}$	Matrice 3x3 des composantes d'une symétrie
$t$	Temps (s)
$T_e$	Périodicité (s)
$u(t)$	Variable d'un système dynamique

$u_0(t, T)$	Ordre zéro de la méthode des échelles multiples
$u_1(t, T)$	Ordre un de la méthode des échelles multiples
$u_m$	Amplitude complexe
$\ddot{u}(t)$	Dérivée seconde de $u(t)$
$\underline{U} = (u, v, w)$	Vecteur dans le voisinage d'un équilibre
$\underline{U} = (u, v)$	Vecteur dans le voisinage d'un équilibre
$\underline{U}^2$	Norme au carré $\underline{U} \cdot \underline{U}$
$v_m$	Amplitude complexe
$\underline{V}_r$	Partie réelle du vecteur propre $\underline{\phi}$
$\underline{V}_i$	Partie imaginaire du vecteur propre $\underline{\phi}$
$V(u)$	Potentiel
$V''(u)$	Dérivée seconde de $V(u)$
$(x, y, z)$	Variables d'un système dynamique
$(x_e, y_e, z_e)$	Équilibres d'un système dynamiques
$\underline{X} = (X_1, \dots)$	Vecteur de composantes $X_i$
$\underline{X}(t)$	Trajectoire solution d'un système dynamique
$\underline{X}_e$	Équilibre d'un système dynamiques
$\underline{X}_+$	Équilibre particulier du modèle de Lorenz
$\underline{X}_-$	Équilibre particulier du modèle de Lorenz
$\underline{X}_b$	Équilibre bas du pendule
$\underline{X}_h$	Équilibre haut du pendule
$\underline{X}^n$	Estimation numérique de $\underline{X}$ au temps $n\Delta t$
$\underline{X}^I, \underline{X}^{II}, \dots$	Estimations numériques de $\underline{X}$
$\underline{Y}(t)$	Trajectoire solution d'un système dynamique
$z = x + iy$	Variable complexe d'un système dynamique
$Z(t)$	Amplitude complexe
$Z^*$	Complexe conjugué de $Z$
$ Z $	Module de $Z$
$\alpha$	Constante
$\beta$	Constante
$\gamma$	Constante
$\delta$	Constante
$\Delta$	Discriminant d'une équation du second degré
$\Delta$	Constante $\omega_e^2/\omega$
$\Delta t$	Pas de temps d'un méthode numérique
$\epsilon$	Petit paramètre
$\Lambda$	Paramètre constant
$\lambda$	Paramètre de frottement pour le pendule amorti ( $s^{(-1)}$ )
$\underline{\mu}$	Paramètres de contrôle
$\rho$	Module de $z$
$\sigma$	Parmètre de contrôle du modèle de Lorenz
$\varphi$	Argument de $Z(0)$

$\underline{\phi}$	Vecteur propre réel ou complexe
$\underline{\phi}^*$	Complexe conjugué de $\underline{\phi}$
$(\underline{\phi}_a, \underline{\phi}_b, \underline{\phi}_c)$	Vecteurs propres
$\omega$	Paramètre de contrôle des modèles de pendule
$\omega$	Partie imaginaire de $s$ ( $s^{-1}$ )
$\omega_e$	Valeur particulière de $\omega$

## COURS ÉCRIT

### Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner quelques éléments utiles pour la compréhension des instabilités observées en mécanique des fluides.

L'exemple du modèle de Lorenz est instructif à plusieurs titres. Il permet tout d'abord de montrer que l'étude de stabilité d'un équilibre se ramène au calcul des valeurs propres de la matrice du système linéarisé. Ensuite, l'examen de la première bifurcation de ce modèle est cohérent avec le fait que la "bifurcation fourche" est la bifurcation stationnaire générique lorsqu'une symétrie est brisée. Enfin, le comportement chaotique observé pour certaines valeurs des paramètres permet de mettre en évidence la sensibilité aux conditions initiales dans un système déterministe, ce que l'on appelle l'effet papillon dans le contexte de la météorologie dont est d'ailleurs issu ce modèle.

L'exemple du pendule simple permet d'introduire la famille des systèmes dynamiques dépendant d'un potentiel qui est un cas particulier de la famille des systèmes dynamiques hamiltoniens. Comme l'énergie et le volume dans l'espace des phases est invariant, ces systèmes sont appelés systèmes conservatifs. Ils présentent la particularité de ne pas posséder d'attracteurs, c'est-à-dire de sous-ensembles de l'espace des phases vers lesquels convergent les trajectoires de leurs voisinages. Au contraire, les systèmes dissipatifs ont la propriété de pouvoir exhiber de tels attracteurs.

La présentation suivante étudie les autres exemples classiques d'oscillateurs : pendule amorti, pendule résonant, oscillateur de Van der Pol et oscillateur paramétrique. Ces exemples permettent de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes que l'on retrouve dans de nombreuses systèmes physiques sujets à des oscillations : portraits de phases en forme d'ellipses convergentes ou divergentes, phénomène de résonance, bifurcation de Hopf, phénomène de résonance paramétrique, exposants de Floquet, etc. La détermination de l'amplitude des oscillations bifurquées au voisinage du seuil d'instabilité est effectuée à l'aide d'une méthode asymptotique aux échelles multiples pour l'oscillateur de Van der Pol et l'oscillateur paramétrique.

## 1 Le modèle de Lorenz et les systèmes dissipatifs

Le modèle de Lorenz est l'un des systèmes dynamique les plus simples permettant d'illustrer la compétition entre un forçage extérieur et la dissipation interne d'un système physique, tout en exhibant des comportements dynamiques non triviaux.

En 1963, Lorenz a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé représenter très grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère [E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130]. La démarche permettant de passer des équations fluides à ce système est exposée dans de nombreux ouvrages, en plus de l'article original de Lorenz et n'est pas abordée ici. Seul les régimes dynamiques de ce modèle sont exposés ici.

### 1.1 Les équations du modèle de Lorenz

On se contente ici d'énoncer que modèle de Lorenz est le système dynamique qui s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -x z + r x - y \\ \dot{z} &= x y - b z\end{aligned}\tag{4.1}$$

avec  $\underline{X}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \in \mathbb{R}^3$ ,  $r \geq 0$ ,  $\sigma \geq 0$  et  $b \geq 0$ .

L'espace des phases, constitué des vecteurs  $\underline{X} \in \mathbb{R}^3$ , est de dimension 3. On dit aussi que le système dynamique possède trois degrés de liberté.

L'espace de contrôle est constitué des vecteurs  $\underline{\mu} = (r, \sigma, b) \in \mathbb{R}_+^3$ . Le choix de Lorenz dans son article de 1963 est  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$  avec  $r$  variable. Physiquement,  $r$  est proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide,  $\sigma$  au nombre de Prandtl et  $b$  à l'élongation de la boîte contenant le fluide. La solution d'équilibre trivial  $x = y = z = 0$  du système correspond physiquement à un régime où le fluide est au repos et où la chaleur se transmet uniquement par diffusion moléculaire. C'est l'état de base conductif. On va voir que pour  $r$  suffisamment grand, cet équilibre est instable et qu'il laisse la place à des régimes où le transfert de chaleur est réalisé par diffusion et par convection.

### 1.2 Équilibres du modèle

Le modèle de Lorenz est donc un système dynamique de la forme  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X})$ . Il est autonome dans la mesure où la fonction  $\underline{F}$  ne dépend pas du temps. Les équilibres, points fixes, points critiques ou encore solutions stationnaires de ce système sont les points  $\underline{X}_e = (x_e, y_e, z_e)$  tels que  $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$ . La résolution du système  $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$  conduit au tableau suivant de solutions :



$0 \leq r \leq 1$ : Une solution	$1 \leq r$ : Trois solutions
$\underline{X}_e = \underline{0}$	
	$\underline{X}_e \in \{\underline{X}_-, \underline{X}_+\}$

avec  $\underline{X}_- = (-a, -a, r-1)$ ,  $\underline{X}_+ = (a, a, r-1)$  et  $a = \sqrt{b(r-1)}$ .

La stabilité d'un équilibre  $\underline{X}_e$  s'obtient en étudiant les valeurs propres de la jacobienne  $\underline{\underline{D}}F(\underline{X}_e)$  obtenue en linéarisant le système autour du point  $\underline{X}_e$ . Le calcul des composantes  $\partial F_i / \partial X_j$  de cette jacobienne conduit à

$$\underline{\underline{D}}F(\underline{X}_e) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_e & -1 & -x_e \\ y_e & x_e & -b \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

### 1.3 Stabilité de l'équilibre nul

La stabilité de l'équilibre trivial  $\underline{X}_e = \underline{0}$  s'obtient en étudiant les valeurs propres  $s$  de la matrice

$$\underline{\underline{D}}F(\underline{0}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

dont l'équation caractéristique est

$$(s+b) \left[ s^2 + (\sigma+1)s + \sigma(1-r) \right] = 0. \quad (4.4)$$

Une première valeur propre est  $s = -b$ . Le discriminant de l'équation du second degré permettant de déterminer les deux autres est  $\Delta = (\sigma-1)^2 + 4\sigma r$ . Comme il est positif, il y a deux racines réelles de somme  $-(\sigma+1)$  et de produit  $\sigma(1-r)$ . On peut donc résumer le signe des trois valeurs propres réelles de  $\underline{\underline{D}}F(\underline{0})$  sur le tableau suivant :

$0 \leq r \leq 1$ : $\underline{0}$ est stable	$1 \leq r$ : $\underline{0}$ est instable
signe de $s \in \{-, -, -\}$	signe de $s \in \{-, -, +\}$

Lorsque  $r \leq 0$ , les trois valeurs propres sont négatives : l'équilibre  $\underline{X}_e = \underline{0}$  est donc stable. Lorsque  $r \geq 0$ , une des valeurs propres est positive : l'équilibre est donc instable. Pour  $r = 1$ , la stabilité est marginale.

Notons  $s_b = -b$  la valeur propre indépendante de  $r$ ,  $s_c(r)$  la valeur propre toujours négative et  $s_d(r)$  la valeur propre qui devient positive pour  $r > 1$ . Les vecteurs propres associés sont notés  $\underline{\phi}_b$ ,  $\underline{\phi}_c(r)$  et  $\underline{\phi}_d(r)$ . Ces vecteurs sont

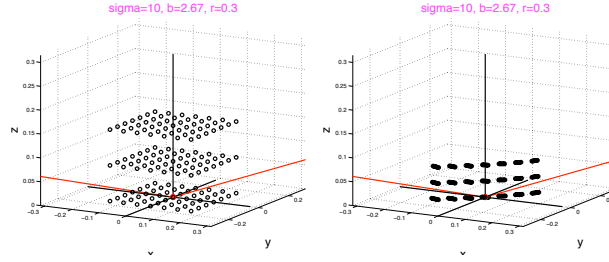


Figure 4.1: Tracé de particule pour  $r = .3$ . a)  $t=0$ , b)  $t=.3$ , c)  $t=1.2$ . L'équilibre  $\underline{0}$  est stable.

définis à une constante près et on peut par exemple choisir  $\phi_b = (0, 0, 1)$  pour le vecteur propres associé à la valeur propre  $s_b = -b$ . L'expression analytique des autres valeurs propres et vecteurs propres est triviale mais n'est pas explicitée ici par souci de concision.

#### 1.4 Portraits de phase au voisinage de l'équilibre nul

Si nous notons  $\underline{U}(t)$  les trajectoires  $\underline{X}(t) = \underline{0} + \underline{U}(t)$  proches de  $\underline{0}$ , l'approximation de linéarisation indique qu'elles sont solutions du système dynamique linéaire  $\dot{\underline{U}}(t) = \underline{DF}(\underline{0})\underline{U}$  ce que l'on peut expliciter de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\sigma u + \sigma v \\ \dot{v} &= r u - v \\ \dot{w} &= -b w ,\end{aligned}\tag{4.5}$$

où l'on a noté  $\underline{U} = (u, v, w)$ . Par rapport au système initial, on voit que l'on a négligé les termes non linéaires  $-x z$  et  $x y$ . On peut alors poser

$$\underline{U}(t) = B(t) \phi_b + C(t) \phi_c + D(t) \phi_d\tag{4.6}$$

où  $(B, C, D)$  sont les composantes de  $\underline{U}$  dans la base propre de la matrice  $\underline{DF}(\underline{0})$ . En reportant cette décomposition dans le système linéaire ci-dessus gouverné par cette matrice on obtient trivialement les équations

$$\dot{B} = s_b B , \quad \dot{C} = s_c C , \quad \dot{D} = s_d D ,\tag{4.7}$$

ce qui se résout en

$$B(t) = B(0)e^{s_b t} , \quad C(t) = C(0)e^{s_c t} , \quad D(t) = D(0)e^{s_d t} .\tag{4.8}$$

Ce résultat démontre le fait que  $\underline{0}$  est stable lorsque les trois valeurs propres sont négatives et qu'il suffit d'une valeur propre positive pour obtenir une divergence des trajectoires dans la direction instable.

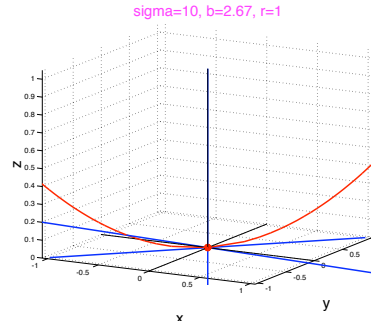


Figure 4.2: Vecteurs propres de la stabilité de  $\underline{0}$  pour  $r = 1$  :  $\underline{\phi}_b$ ,  $\underline{\phi}_c(1)$  et  $\underline{\phi}_d(1)$ .

Il permet aussi de tracer le portraits de phase, c'est-à-dire l'ensemble de trajectoires, dans le voisinage de  $\underline{0}$ . Le cas le plus intéressant à examiner est obtenu pour  $r$  proche de la valeur critique  $r = 1$ . Pour cette valeur, les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $(s_b, s_c, s_d) = [-b, -(\sigma + 1), 0]$  sont

$$\underline{\phi}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_c(1) = \begin{pmatrix} \sigma \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_d(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Dans un plan affine engendré par les vecteurs  $[\underline{\phi}_b(1), \underline{\phi}_c(1)]$ , les trajectoires convergent toutes vers l'intersection de ce plan de coordonnées  $(B, C)$  avec l'axe  $\underline{\phi}_d$  le long des courbes d'équations  $C/C(0) = [B/B(0)]^{\frac{\sigma+1}{b}}$ . Cette convergence est exponentielle.

On voit donc que toutes les trajectoires convergent vers l'axe engendré par  $\underline{\phi}_d(1)$ , au moins pour celles qui sont proches de  $\underline{0}$ . On montre que c'est en fait le cas pour toutes les trajectoires, même éloignées de  $\underline{0}$ , mais il faut utiliser pour cela un raisonnement (fonctionnelle de Liapounov) qui dépasse le cadre de cette présentation.

Pour  $r$  légèrement inférieur à un, l'orientation des vecteurs propres est légèrement modifiée. En revanche, les trajectoires sur l'axe  $\underline{\phi}_d$  convergent vers zéro, alors qu'elles étaient réduites à un continuum de points (tout l'axe) pour  $r$  exactement à un. Toutes les trajectoires du système linéaire convergent donc vers  $\underline{0}$  qui est donc stable.

Pour  $r$  légèrement supérieur à un, les trajectoires divergent, lentement, sur l'axe  $\underline{\phi}_d$ . Il arrive alors un moment où l'approximation linéaire n'est plus valable, si bien que ces trajectoires quittent l'axe  $\underline{\phi}_d$ . Il est naturel de penser que ces trajectoires vont converger vers l'un des équilibres bifurqués à partir de la valeur critique  $r = 1$ . Il convient maintenant d'étudier la stabilité de ces nouveaux équilibres.

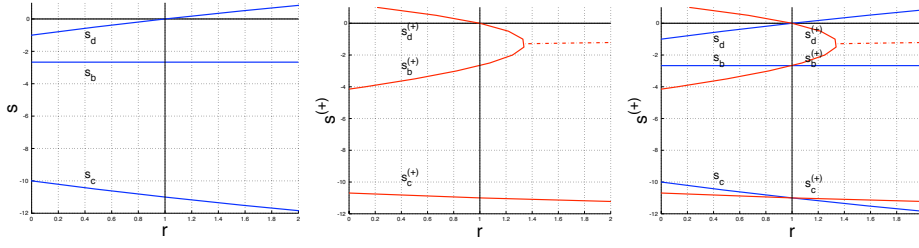


Figure 4.3: Valeurs propres en fonction de  $r \in [0, 2]$ . a) Stabilité de  $\underline{0}$  :  $s_d(r)$ ,  $s_b(r)$  et  $s_c(r)$  b) Stabilité de  $\underline{X}^{(+)}$  :  $s_d^{(+)}(r)$ ,  $s_b^{(+)}(r)$  et  $s_c^{(+)}(r)$  c) Superposition des deux graphes.

### 1.5 Stabilité des équilibres bifurqués

La stabilité de l'équilibre  $\underline{X}_e = \underline{X}_+ = (a, a, r-1)$  avec  $a = \sqrt{b(r-1)}$  s'obtient en étudiant les valeurs propres  $s$  de la matrice

$$\underline{\underline{DF}}(\underline{X}_+) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -a \\ a & a & -b \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

dont l'équation caractéristique est

$$s^3 + s^2(\sigma + b + 1) + s b(\sigma + r) + 2b(r-1)\sigma = 0. \quad (4.11)$$

Suivant les valeurs des paramètres de contrôles  $(r, \sigma, b)$ , ce polynôme de degré trois peut avoir trois racines réelles ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Notons  $[s_b^{(+)}(r), s_c^{(+)}(r), s_d^{(+)}(r)]$  ces trois racines. Le signe de la partie réelle des trois racines de  $\underline{X}_e$  détermine la stabilité du point d'équilibre  $\underline{X}_e$ . Sans entrer dans une discussion paramétrique complète sur cette stabilité, nous allons nous concentrer ici sur les cas où  $r$  est dans le voisinage de la valeur critique  $r = 1$ .

Comme  $\underline{X}_+ = \underline{0}$  pour  $r = 1$ , on peut faire le lien avec les trois valeurs propres déterminant la stabilité de  $\underline{0}$  et ordonner les notations de telle sorte que l'on ait :

$$s_b^{(+)}(1) = -b, \quad s_c^{(+)}(1) = -(\sigma + 1) \quad \text{et} \quad s_d^{(+)}(1) = 0. \quad (4.12)$$

En posant  $r = 1 + \epsilon$  où  $\epsilon > 0$  est un petit paramètre, on peut donc effectuer les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} s_b^{(+)}(1 + \epsilon) &= -b + \beta\epsilon + O(\epsilon^2) \\ s_c^{(+)}(1 + \epsilon) &= -(\sigma + 1) + \gamma\epsilon + O(\epsilon^2) \\ s_d^{(+)}(1 + \epsilon) &= \delta\epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

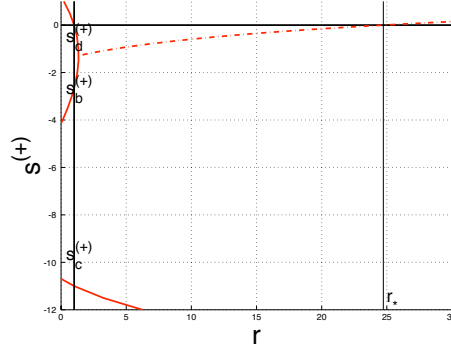


Figure 4.4: Valeurs propres en fonction de  $r \in [0, 30]$ . Stabilité de  $\underline{X}^{(+)}$  :  $s_d^{(+)}(r)$ ,  $s_b^{(+)}(r)$  et  $s_c^{(+)}(r)$

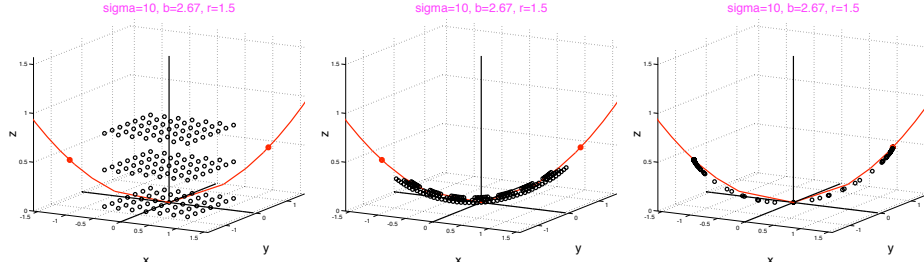


Figure 4.5: Tracé de particule pour  $r = 1.5$ . a)  $t=0$ , b)  $t=3$ , c)  $t=6$ . L'équilibre  $\underline{X}^{(+)}$  est stable.

Pour  $\epsilon$  suffisamment petit, les valeurs propres  $s_b^{(+)}$  et  $s_c^{(+)}$  restent réelles et négatives. La stabilité de  $\underline{X}_e$  est dépend donc du signe de  $s_d^{(+)}$  et donc du signe de  $\delta$ . En reportant le développement de  $s_d^{(+)}$  dans le polynôme caractéristique et en identifiant l'ordre dominant en  $\epsilon$ , on voit facilement que  $\delta = -2\sigma/(\sigma+1)$ . On peut donc affirmer que  $\underline{X}_+$  est stable lorsque  $r$  est dans un voisinage de la valeur critique  $r = 1$ . L'étude de stabilité de  $\underline{X}_-$  conduit au même polynôme caractéristique et donc à la même conclusion. En fait, la symétrie  $\underline{S}$  qui à  $\underline{X} = (x, y, z)$  associe  $\underline{S}\underline{X} = (-x, -y, z)$  est une symétrie du système dynamique. En effet, on voit que  $\underline{F}(\underline{S}\underline{X}) = \underline{S}\underline{F}(\underline{X})$ , si bien que si  $\underline{X}(t)$  est une solution, alors  $\underline{Y}(t) = \underline{S}\underline{X}(t)$  en est une autre. On remarque que l'équilibre  $\underline{X}_e = \underline{0}$  vérifie  $\underline{S}\underline{X}_e = \underline{X}_e$ , tandis que les deux équilibres bifurqués à partir de la valeur  $r = 1$  vérifient  $\underline{S}\underline{X}_+ = \underline{X}_-$  et  $\underline{S}\underline{X}_- = \underline{X}_+$ . On dit que la bifurcation obtenue pour  $r = 1$  brise la symétrie  $\underline{S}$ . L'ensemble de ces considérations montre que l'on est en présence d'une bifurcation fourche supercritique.

Les trajectoires dans le voisinage de l'équilibre  $\underline{X}_+$  s'obtiennent en traçant

tout d'abord les vecteurs propres de la matrice  $\underline{DF}(\underline{X}_+)$ . Pour  $r$  proche de 1, ces vecteurs propres sont proches des vecteurs propres  $\underline{\phi}_b$ ,  $\underline{\phi}_c(1)$  et  $\underline{\phi}_d(1)$  que l'on a déjà explicités pour étudier les trajectoires autour de  $\underline{0}$ . Dans un plan affine engendré par  $\underline{\phi}_b$  et  $\underline{\phi}_c$ , les trajectoires sont identiques à celles obtenues dans le voisinage de  $\underline{0}$ . Sur l'axe  $\underline{\phi}_d$ , les trajectoires convergent vers l'équilibre  $\underline{X}_+$ . Le portrait de phase dans le voisinage de  $\underline{X}_-$  et pour  $r$  toujours proche de 1, s'obtient en traçant les trajectoires par symétrie par rapport aux trajectoires du voisinage de  $\underline{X}_+$ .

Pour  $r$  proche de 1, on peut réunir les trajectoires du voisinage de  $\underline{0}$  et les trajectoires des voisinages de  $\underline{X}_+$  et  $\underline{X}_-$  en traçant une trajectoire partant de  $\underline{0}$  dans la direction du vecteur propre de  $\underline{DF}(\underline{0})$  proche de  $\underline{\phi}_d$  et rejoignant  $\underline{X}_+$  le long de la direction propre de  $\underline{DF}(\underline{X}_+)$  proche de  $\underline{\phi}_d$ . La trajectoire symétrique relie  $\underline{0}$  et  $\underline{X}_+$  de la même manière.

## 1.6 Autres régimes lorsque $r$ devient grand

Lorsque  $r$  augmente au-delà du voisinage de  $r = 1$ , on peut chercher s'il existe une valeur critique  $r = r_*$  pour laquelle les équilibres  $\underline{X}_+$  et  $\underline{X}_-$  deviennent instables (simultanément à cause de la symétrie). On rappelle que la stabilité de ces équilibres dépend du signe de la partie réelle des racines du polynôme caractéristique :

$$s^3 + s^2(\sigma + b + 1) + s b(\sigma + r) + 2b(r - 1)\sigma = 0. \quad (4.14)$$

La déstabilisation de ces équilibres par changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si  $s = 0$  on a forcément  $r = 1$ . On peut donc rechercher pour quelles valeurs des paramètres on peut obtenir deux racines  $i\omega$  et  $-i\omega$  de partie réelle nulle. En reportant la valeur  $s = i\omega$  dans l'équation caractéristique, on obtient les deux conditions  $-\omega^2(\sigma + b + 1) + 2b(r - 1)\sigma = 0$  et  $-i\omega^3 + i\omega b(\sigma + r) = 0$ . En éliminant  $\omega^2$  entre les deux équations, on obtient finalement

$$r_* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)}. \quad (4.15)$$

Pour les valeurs classiques  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$ , on obtient  $r_* = 470/19 \sim 24,73$ . On peut remarquer qu'entre le voisinage de  $r = 1$  où les trois racines sont réelles, et le voisinage de  $r = r_*$  où il y a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées, il existe une valeur  $r = r_d$  telle que le polynôme admette un racine double négative. Pour  $r$  légèrement supérieur à  $r_d$ , il y a deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle négative et les portraits de phase dans le voisinages de  $\underline{X}_+$  et  $\underline{X}_-$  sont des spirales elliptiques convergeant exponentiellement vers ces équilibres stables.

La déstabilisation de des équilibres  $\underline{X}_+$  et  $\underline{X}_-$  correspond donc à une instabilité oscillatoire et donc une bifurcation de Hopf. Deux valeurs propres com-

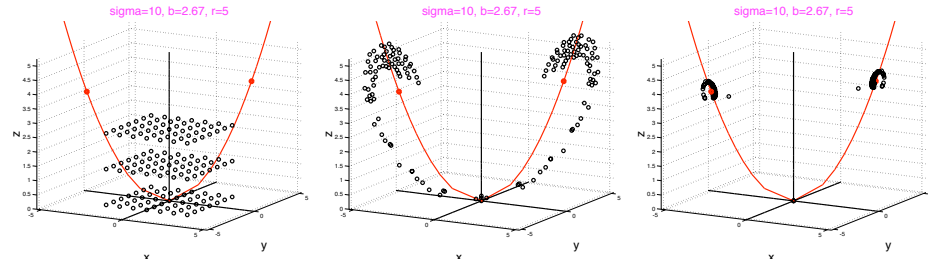


Figure 4.6: Tracé de particule pour  $r = 5$ . a)  $t=0$ , b)  $t=1$ , c)  $t=3$ . L'équilibre  $\underline{X}^{(+)}$  est stable.

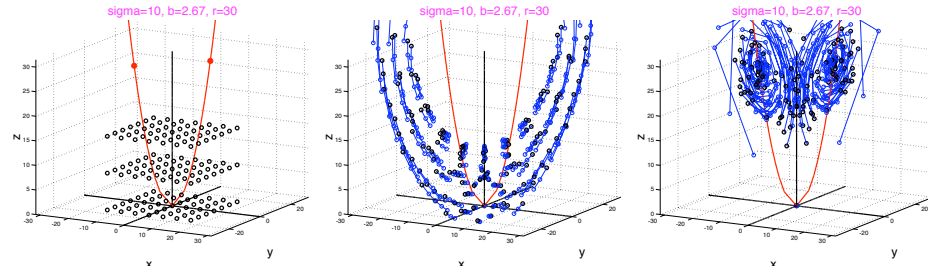


Figure 4.7: Tracé de particule pour  $r = 30 > r_*$ . a)  $t=0$ , b)  $t=.1$ , c)  $t=2$ . Le régime est chaotique.

plexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires lorsque le paramètre  $r$  franchit la valeur critique  $r_*$ . Dans le quart de plan  $(\sigma, b)$ , il existe deux domaines connexes dans lesquels cette bifurcation est supercritique, le complémentaire correspondant au cas où la bifurcation est sous-critique. La détermination analytique de ces domaines dépasse le cadre de ce cours (calcul de formes normales). Indiquons simplement que les valeurs classiques  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$  correspondent au cas où la bifurcation est sous-critique.

Dans ce cas, la simulation numérique du système dynamique montre que l'on transite abruptement vers un régime chaotique où la trajectoire tourne autour d'un des équilibres instables  $\underline{X}_+$  et  $\underline{X}_-$  comme si elles y convergeaient avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour y répéter le même type de comportement. On observe que toutes les trajectoires convergent vers une trajectoire chaotique que l'on nomme "attracteur étrange". On montre que la dimension fractale de cette trajectoire est supérieure à un et que la distance entre deux conditions initiales initialement très proches s'amplifie très rapidement. Cette sensibilité aux conditions initiales, ainsi que le chaos déterministe observé avec ce système dynamique simple, ont servi de base à ce que l'on appelle "l'effet papillon". Si l'évolution de l'atmosphère est comparable à l'évolution d'un système dynamique comme celui de Lorenz,

la prise en compte ou non de l'effet du battement d'une aile de papillon dans les conditions initiales peut changer radicalement l'évolution du temps (atmosphérique) au bout d'un temps (en nombre de jours) estimé à environ 7 jours.

## 2 Le pendule simple et les systèmes conservatifs

Le pendule simple est le système dynamique prototype des modèles conservatifs, qui décrivent des systèmes pour lesquels le forçage extérieur et la dissipation interne sont nulles. C'est un cas particulier des systèmes dynamiques dépendant d'un potentiel qui sont eux-mêmes un cas particulier des systèmes hamiltoniens.

### 2.1 Équation du pendule simple

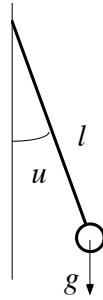


Figure 4.8: Pendule simple

On considère un pendule simple formé d'une masse  $m$  assimilée à un point et suspendue à un fil de masse négligeable et de longueur  $l$ . En l'absence de frottement, l'angle  $u(t)$  que fait le pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\ddot{u} + \omega^2 \sin u = 0 . \quad (4.16)$$

où  $\omega = \sqrt{g/l}$  et  $g$  est la gravité. Cette équation ne fait pas intervenir la masse.

Cette équation différentielle de degré deux peut se transformer en un système dynamique de degré un  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$  en posant  $\underline{X} = (q, p)$  et en écrivant

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \sin q . \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'espace des phases de ce système est l'ensemble des  $\underline{X} \in \mathbb{R}^2$  et l'espace de contrôle est constitué de l'ensemble des valeurs du paramètre  $\omega^2 \in \mathbb{R}_+$ .



On remarque l'existence d'une invariance qui est la translation  $T_{2\pi}\underline{X} = \underline{X} + (2\pi, 0)$ . Si  $\underline{X}(t)$  est une trajectoire, alors  $\underline{Y}(t) = T_{2\pi}\underline{X}(t) = \underline{X}(t) + (2\pi, 0)$  en est une autre. On dit aussi que l'espace des phases est l'ensemble des  $\underline{X} \in T^1 \times \mathbb{R}$  où  $T^1$  est le cercle de périmètre  $2\pi$ .

## 2.2 Stabilité de l'équilibre haut

Les deux équilibres de ce système, obtenus en résolvant  $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$ , sont  $\underline{X}_b = (0, 0)$  et  $\underline{X}_h = (\pi, 0)$ . Ces équilibres correspondent à la position basse ( $\underline{X}_b$ ) et à la position haute ( $\underline{X}_h$ ) du pendule.

La jacobienne de l'application  $\underline{F}$  est la matrice

$$\underline{\underline{D}}F(\underline{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos X_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

La stabilité de  $\underline{X}_h$  est donc obtenue en calculant les valeurs propres de la matrice

$$\underline{\underline{D}}F(\underline{X}_h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

c'est-à-dire en résolvant l'équation  $s^2 - \omega^2 = 0$ . Les valeurs propres sont donc  $s = \omega$ , à laquelle est associé le vecteur propre  $\underline{\phi}^+ = (1, \omega)$  et  $s = -\omega$  à laquelle est associé le vecteur propre  $\underline{\phi}^- = (1, -\omega)$ . L'équilibre est donc instable, la direction d'instabilité étant le long de l'axe  $\underline{\phi}^+$ . Le portrait de phase autour de  $\underline{X}_h$  est constitué d'hyperboles dont les asymptotes sont données par les directions  $\underline{\phi}^+$  et  $\underline{\phi}^-$ .

## 2.3 Stabilité de l'équilibre bas

La stabilité de  $\underline{X}_b = \underline{0}$  est obtenue en calculant les valeurs propres de la matrice

$$\underline{\underline{D}}F(\underline{X}_b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

c'est-à-dire en résolvant l'équation  $s^2 + \omega^2 = 0$ . Les valeurs propres sont donc  $s = i\omega$ , à laquelle est associé le vecteur propre  $\underline{\phi} = (1, i\omega)$  et  $s^* = -i\omega$  à laquelle est associé le vecteur propre  $\underline{\phi}^* = (1, -i\omega)$ .

L'étude de la stabilité de  $\underline{X}_b = \underline{0}$  revient à poser  $\underline{X}(t) = \underline{X}_b + \underline{U}(t)$  et à négliger les termes d'ordre  $\underline{U}^2$ . On se ramène donc à l'étude de l'équation du pendule linéaire  $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$  qui s'écrit aussi sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

On peut indiquer directement la solution de l'équation du second ordre en posant  $u(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$  ou bien poser  $Z(t) = u + i\frac{1}{\omega}v$  pour combiner astucieusement les équations du système d'ordre un.

On obtient alors  $\dot{Z} = i\omega Z$  qui se résout en  $Z(t) = Z(0)e^{i\omega t} = Re^{i\omega t + i\varphi}$ . Comme  $u(t) = Z(t) + Z^*(t) = 2R\cos(\omega t + i\varphi)$ , ces deux approches se rejoignent en posant  $a = 2R$ . On a alors  $v(t) = \dot{u}(t) = -a\omega \sin(\omega t + i\varphi)$ . Les trajectoires sont donc des ellipses d'axes parallèles aux axes des coordonnées  $(u, v)$ , engendrées par les vecteurs  $a(1, 0)$  et  $a(0, \omega)$ . Le sens de rotation est contraire au sens trigonométrique.

Une autre manière de présenter la deuxième approche consiste à poser

$$\underline{U}(t) = Z(t)\underline{\phi} + Z^*(t)\underline{\phi}^* = \begin{pmatrix} Z(t) + Z^*(t) \\ i\omega Z(t) - i\omega Z^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En reportant dans le système linéaire et en utilisant le fait que  $\underline{\phi}$  et  $\underline{\phi}^*$  sont vecteurs propres, on obtient le système

$$\dot{Z} = i\omega Z \quad \text{et} \quad \dot{Z}^* = -i\omega Z^*. \quad (4.23)$$

On remarque que les ellipses formées par les trajectoires sont engendrées par des couples de vecteurs proportionnels aux vecteurs  $\underline{V}_r = \text{Re}(\underline{\phi})$  et  $\underline{V}_i = \text{Im}(\underline{\phi})$ . On vérifie facilement que cette propriété s'applique de manière très générale aux portraits de phase associés à des valeurs propres complexes conjuguées obtenues en étudiant la stabilité d'un équilibre.

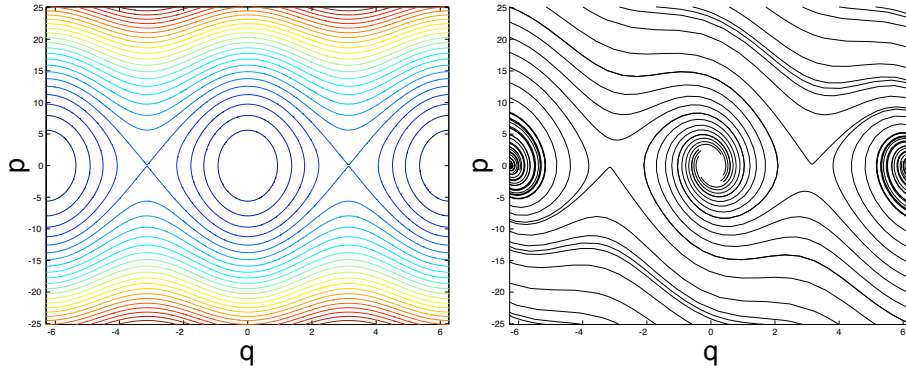


Figure 4.9: a) Portrait de phase du pendule simple. b) Portrait de phase du pendule amorti pour  $\omega = 2\pi$  et  $\lambda = 1$ .

## 2.4 Systèmes dépendant d'un potentiel

Le pendule simple est un cas particulier de la famille des équations différentielles s'écrivant sous la forme  $\ddot{u} = -V'(u)$  où  $V(u)$  est une fonction dérivable quelconque appelée potentiel. On peut poser par exemple  $V(u) = \omega^2(1 - \cos u)$  pour le pendule non-linéaire et  $V(u) = \frac{1}{2}\omega^2 u^2$  pour le pendule linéaire appelé aussi pendule harmonique.

On peut ramener ces équations à des systèmes de degré un  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$  en posant  $\underline{X} = (q, p)$  et en écrivant

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -V'(q) .\end{aligned}\tag{4.24}$$

Les équilibres sont des points  $\underline{X}_e = (q_e, 0)$  tels que  $X_e$  est un extremum de la fonction  $V$ . La stabilité de ces équilibres est obtenue en calculant les valeurs propres de la matrice

$$\underline{\underline{D}}F(\underline{X}_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(q_e) & 0 \end{pmatrix} ,\tag{4.25}$$

c'est-à-dire en recherchant les solutions de  $s^2 + V''(q_e) = 0$ . Si  $V''(q_e) < 0$ , la valeur  $q_e$  correspond à un maximum du potentiel  $V$ . Les valeurs propres sont alors  $s = \pm\sqrt{-V''(q_e)}$  et l'équilibre est instable. Si  $V''(q_e) = \omega_e^2 > 0$ , la valeur  $q_e$  correspond à un minimum du potentiel  $V$ . Les valeurs propres sont alors  $s = \pm i\omega_e$  et l'équilibre est marginal.

En restant dans le cadre d'un potentiel  $V(u)$  quelconque, on considère la fonction  $E(t) = \frac{1}{2}p(t)^2 + V[q(t)]$  associée à une trajectoire  $[q(t), p(t)]$  solution du système. On montre facilement que  $\dot{E}(t) = p(t)\dot{p}(t) + \dot{q}(t) V'[q(t)] = -p(t) V'[q(t)] + p(t) V'[q(t)] = 0$ . On appelle énergie la quantité  $E(t) = E_0$  qui est donc un invariant du mouvement. Cette énergie s'écrit aussi  $E(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + V(u)$  et peut être vue comme la somme de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}\dot{u}^2$  et de l'énergie potentielle  $V(u)$ .

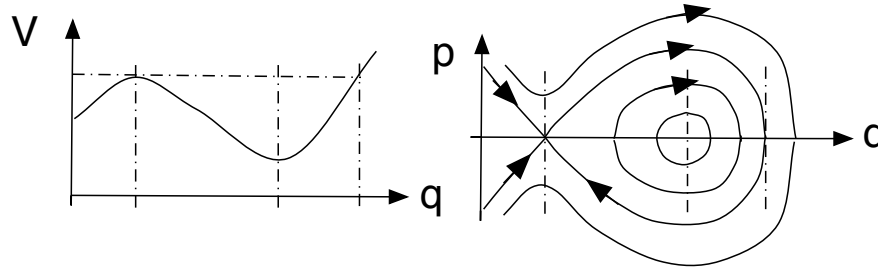


Figure 4.10: Système dépendant d'un potentiel. a) Forme d'un potentiel  $V(q)$ . b) Portrait de phase dans le plan  $(q, p)$ .

En utilisant l'invariance de l'énergie on peut affirmer que les trajectoires sont les courbes  $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q) = E_0$ . Grâce à cette interprétation, on peut tracer le portrait de phase d'un système défini par une fonction  $V$  quelconque. Il suffit pour cela d'imaginer une bille qui roule le long d'une colline dont l'altitude est le potentiel  $V$ .

## 2.5 Systèmes dynamiques hamiltoniens

Les systèmes dépendant d'un potentiel sont des cas particuliers de la famille des systèmes hamiltoniens qui s'écrivent

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p)\end{aligned}\quad (4.26)$$

où  $H(q, p)$  est une fonction dérivable quelconque.

En posant  $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$  on retrouve le cas des systèmes dépendant d'un potentiel. Mais on peut considérer d'autres formes de l'Hamiltonien  $H(q, p)$  comme par exemple  $H = q p$ .

Étant donnée une solution  $[q(t), p(t)]$ , on montre que la quantité  $E(t) = H[q(t), p(t)]$  est encore un invariant du mouvement. En effet,

$$\dot{E} = \dot{q} \frac{\partial H}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad (4.27)$$

On montre de plus que les aires sont conservées dans l'espace des phases. En effet, si on note  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$  avec  $\underline{X} = (q, p)$  le système dynamique hamiltonien, on peut calculer la divergence

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{X}) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0. \quad (4.28)$$

Cette propriété entraîne qu'un volume (ici une aire) de conditions initiales reste constant au cours du temps, comme dans le cas d'un écoulement isochore. On parle alors de systèmes conservatifs. De tels systèmes n'admettent pas d'attracteurs, c'est-à-dire d'ensembles vers lesquelles toutes les trajectoires d'un bassin d'attraction pourraient converger.

L'invariance de l'hamiltonien  $H$  et des aires dans l'espace des phases se généralise au cas des systèmes hamiltoniens  $H(\underline{q}, \underline{p})$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  dont l'expression générale est

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{q}, \underline{p}) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{q}, \underline{p})\end{aligned}\quad (4.29)$$

pour  $i = 1, \dots, n$  avec  $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$  et  $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ .

## 3 Autres oscillateurs et phénomènes non linéaires

On considère maintenant des exemples d'oscillateurs qui prennent en compte les phénomènes de frottement ainsi que des forçages externes. Contrairement

aux systèmes conservatifs, ces systèmes sont dissipatifs. Dans certains cas, il s'établit un équilibre (au sens large) entre le forçage et la dissipation. Ces équilibres sont parfois des attracteurs dans la mesure où un ensemble de conditions initiales peuvent y converger. La particularité des exemples ci-dessous est le fait que ces équilibres se traduisent par des régimes oscillant en temps.

### 3.1 Le pendule amorti

Lors de l'oscillation du pendule, le frottement de l'air peut se modéliser par une force proportionnelle à la vitesse. On obtient donc l'expression

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (4.30)$$

Le paramètre  $\lambda > 0$  est donc un facteur d'amortissement du mouvement du pendule.

Les équilibres sont les mêmes que pour le pendule non amorti. Leur stabilité et le portrait de phase de leur voisinage s'obtient en linéarisant les équations autour de la position haute (instable) ou de la position basse (stable).

Une manière rapide d'étudier la stabilité de la position basse  $u = 0$  consiste à chercher des solutions complexes de la forme  $u(t) = u_m e^{st}$  avec  $u_m \in \mathcal{C}$  et  $s \in \mathcal{C}$  dans l'équation linéarisée autour de zéro qui s'écrit  $\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 u = 0$ . Comme l'équation est linéaire, la partie réelle d'une solution complexe est une solution. On doit alors chercher les racines de l'équation  $s^2 + 2\lambda s + \omega^2 = 0$ . Lorsque  $\lambda < \omega$ , il existe deux racines complexes conjuguées

$$s = -\lambda \pm i \omega \sqrt{1 - \lambda^2/\omega^2}. \quad (4.31)$$

Le retour à l'équilibre s'effectue par des oscillations exponentiellement amorties. Lorsque  $\lambda$  est petit, les oscillations sont faiblement amorties et la pulsation est proche de  $\omega$ .

Lorsque  $\lambda > \omega$ , il existe deux racines réelles

$$s = -\lambda \left( 1 \pm \sqrt{1 - \omega^2/\lambda^2} \right). \quad (4.32)$$

Le retour à l'équilibre exponentiellement sans oscillation. On parle alors de "sur-relaxation".

L'étude de stabilité autour de la position haute fait apparaître uniquement des valeurs propres réelles dont l'une est positive. En connectant les portraits de phase des voisinages des deux équilibres, on peut tracer toutes les trajectoires de l'espace des phases  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(u, \dot{u})$ .

### 3.2 Le pendule résonant

On peut maintenant considérer le cas où les oscillations du pendule sont entretenues en exerçant sur la masse ponctuelle une force oscillant à la pulsation  $\omega_e$  (en imposant par exemple un champ magnétique lorsque la masse est

Figure 4.11: portrait de phase du pendule amorti pour  $T = 2\pi/\omega = 1$  et  $\lambda = 1$ .

aimantée). Les équations du mouvement peuvent alors s'écrire

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 \sin u = f \cos(\omega_e t) . \quad (4.33)$$

Cette équation différentielle ordinaire de degré deux peut se mettre sous la forme d'un système dynamique de degré un  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}, t)$  avec  $\underline{X} \in \mathbb{R}^2$ . Ce système n'est pas autonome dans la mesure où  $\underline{F}$  dépend du temps.

La position basse  $u = 0$  n'est plus un équilibre du système dynamique si  $f \neq 0$  mais on peut quand même s'intéresser aux trajectoires situées dans le voisinage de  $\underline{X} = \underline{0}$ , surtout si le forçage  $f$  est un petit paramètre. Dans ce cas, ces trajectoires sont solutions de l'équation linéarisée

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 u = f \cos(\omega_e t) . \quad (4.34)$$

Sauf cas particulier discuté ci-dessous, les solutions de cette équation linéaire (non homogène) sont de la forme  $u(t) = u_m e^{i\omega_e t} + u_m^* e^{-i\omega_e t}$  où  $u_m \in \mathcal{C}$  et  $s \in \mathcal{C}$  sont des coefficients complexes. En reportant dans l'équation linéaire on obtient

$$(\omega^2 - \omega_e^2 + 2i\lambda\omega_e)u_m = f/2 . \quad (4.35)$$

En notant  $\Delta = \omega_e^2/\omega^2$  et  $\Lambda = \lambda^2/\omega^2$ , l'amplitude de la réponse du pendule au forçage est donc

$$|u_m| = \frac{f}{2\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{(1-\Delta)^2 + 4\Lambda\Delta}} . \quad (4.36)$$

Cette réponse est maximale pour  $\Delta = 1-2\Lambda$  et s'écrit alors  $|u_m| = \frac{f}{2\omega^2} \frac{1}{4\Lambda(1-\Lambda)}$ . Lorsque  $\Lambda$  est très petit (faible dissipation) la réponse est très grande pour pour  $\Delta \sim 1$  c'est-à-dire  $\omega_e \sim \omega$ . On est en présence du phénomène de résonance.

Lorsque  $\lambda = 0$  et  $\omega = \omega_e = \omega$ , c'est-à-dire pour le cas de la résonance, on cherche une solution sous la forme  $u(t) = t(v_m e^{i\omega t} + v_m^* e^{-i\omega t})$  avec  $v_m \in \mathcal{C}$ . On trouve alors  $v_m = -i\frac{f}{4\omega}$  ce qui conduit à la solution  $u(t) = \frac{f}{2\omega} t \sin(\omega t)$ . La réponse du pendule croît donc linéairement avec le temps à la résonance. Lorsque les trajectoires s'éloignent du voisinage de  $u = 0$ , l'approximation linéaire n'est plus valable et il faut tenir compte de la nonlinéarité contenue dans le terme  $\sin u$ . La réponse du pendule lorsque  $\Delta$  varie et pour différentes valeurs de  $f$  peut être obtenu numériquement ou par un développement asymptotique lorsque  $f$  est petit. On peut alors observer le phénomène d'hysteresis correspondant au fait que deux réponses sont possibles pour une même valeur des paramètres de contrôle.

### 3.3 L'oscillateur de Van der Pol

Une autre façon de forcer le pendule peut être obtenue en imposant une force proportionnelle à la vitesse et dans le même sens, au moins pour les petites oscillations. On peut imaginer une telle force sur un pendule en utilisant l'induction magnétique que provoque la masse ponctuelle lorsqu'elle est électriquement chargée. Mais les équations du pendule avec une dissipation négative pour les petites oscillations apparaissent naturellement dans un montage électronique portant le nom d'oscillateur de Van der Pol. Ces équations s'écrivent

$$\ddot{u} + (k u^2 - 2\mu) \dot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (4.37)$$

La stabilité de l'équilibre  $u = 0$  s'obtient en étudiant la partie réelle des valeurs propres du système linéarisé qui s'écrivent  $s = \mu \pm i\omega$ . La position basse  $u = 0$  est donc stable pour  $\mu < 0$  (on retrouve la notion de dissipation en posant  $\mu = -\lambda$ ) et instable pour  $\mu > 0$ . La valeur critique de la bifurcation est  $\mu = 0$ . On s'attend alors à être en présence d'une bifurcation de Hopf.

Il est possible de calculer l'amplitude de saturation de l'instabilité par les termes nonlinéaires au voisinage de la bifurcation  $\mu = 0$ , grâce à des développements asymptotiques où  $\mu$  est le petit paramètre. On peut par exemple effectuer un développement en échelles multiples en posant  $\mu = M\epsilon$  et

$$u(t) = \sqrt{\epsilon} \left[ u_0(t, \epsilon t) + \epsilon u_1(t, \epsilon t) + o(\epsilon^2) \right] \quad (4.38)$$

où les fonctions  $u_i(t, T)$  sont considérées comme des fonctions de deux variables indépendantes et doivent rester d'ordre 1. Ce choix de développement est conforme à ce que l'on attend d'une bifurcation de Hopf où une oscillation sur une échelle de temps d'ordre 1 coexiste avec une amplification sur une échelle de temps inversement proportionnelle à l'écart au seuil et où l'amplitude de l'oscillation bifurquée croît comme la racine carrée de l'écart au seuil.

Il convient alors de calculer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sqrt{\epsilon} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial t} + \epsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial T} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + o(\epsilon^2) \right] \\ \ddot{u} &= \sqrt{\epsilon} \left[ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \epsilon \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial T} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) + o(\epsilon^2) \right] \\ \sin u &= u - \frac{1}{6} u^3 + o(u^4) = \sqrt{\epsilon} \left[ u_0 + \epsilon \left( u_1 - \frac{1}{6} u_0^3 \right) + o(\epsilon^2) \right] \\ u^2 &= \epsilon \left[ u_0^2 + o(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

En reportant dans l'équation, l'ordre dominant en  $\sqrt{\epsilon}$  s'écrit  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \omega^2 u_0 = 0$  ce qui conduit à la solution  $u_0(t, T) = A(T)e^{i\omega t} + A^*(T)e^{-i\omega t}$  où  $A(T)$  est un

fonction complexe arbitraire de la variable  $T$ . À l'ordre suivant, en  $\epsilon\sqrt{\epsilon}$ , on obtient l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 &= -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial T} - k u_0^2 \frac{\partial u_0}{\partial t} + 2M \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{1}{6} u_0^3 \\ &= \sum_{n=-3}^{n=3} C_n(T) e^{i n \omega t}\end{aligned}\quad (4.40)$$

où les fonctions  $C_n(T)$  s'expriment en fonction de  $A(T)$  et de ses dérivées. Pour que  $u_1(t, T)$  reste d'ordre 1, comme supposé dans le développement, il est nécessaire d'imposer  $C_1(T) = C_{-1}(T) = 0$ . En effet, en l'absence de cette condition dite de compatibilité, le terme  $u_1$  serait proportionnel à  $t$  et donc non borné. On parle aussi de condition de résonance. En calculant l'expression de  $C_1(T)$ , cette condition s'écrit donc

$$\frac{dA}{dT} = M A - \left( \frac{k}{3} + \frac{3}{2\omega} i \right) |A|^2 A. \quad (4.41)$$

En posant  $Z(t) = \sqrt{\epsilon} A(\epsilon t) e^{i\omega t}$ , on obtient finalement la solution

$$u(t) = Z(t) + Z^*(t) + O(|Z|^3) \quad (4.42)$$

où l'amplitude complexe  $Z(t)$  est solution de l'équation

$$\dot{Z} = (\mu + i\omega) Z - \alpha |Z|^2 Z \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k}{3} + \frac{3}{2\omega} i. \quad (4.43)$$

On voit donc que la bifurcation de Hopf est supercritique pour  $k > 0$  et sous-critique pour  $k < 0$ .

### 3.4 L'oscillateur paramétrique

Une autre façon d'exciter un pendule consiste à faire osciller sa longueur ou bien le champ de gravité apparent en faisant osciller verticalement son point d'attache. On note  $\omega_e$  la pulsation de ces oscillations de forçage dit paramétrique dans la mesure où il modifie les paramètre de contrôle du pendule simple. Lorsque ce forçage est petit, l'équation du pendule paramétrique s'écrit :

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 [1 + h \cos(\omega_e t)] \sin u = 0. \quad (4.44)$$

L'espace de contrôle de ce système est constitué des paramètres  $(\lambda, \frac{\omega}{\omega_e}, h) \in \mathbb{R}_+^3$ . En effet, un changement d'unité de temps permet de voir que seul le rapport  $\omega/\omega_e$  est pertinent pour l'étude des solutions.

Cette équation différentielle ordinaire de degré deux se ramène à un système dynamique d'ordre un de la forme  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}, t)$  avec  $\underline{X} \in \mathbb{R}^2$  qui est



dépendant du temps. La stabilité de l'équilibre  $\underline{X} = 0$  s'obtient en linéarisant les équations ce qui conduit ici au système linéaire

$$\dot{\underline{U}} = \underline{\underline{L}}(t) \underline{U} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{L}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 h \cos(\omega_e t) & -2\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

L'étude des systèmes dynamiques linéaires  $\dot{\underline{U}} = \underline{\underline{L}}(t)\underline{U}$  avec  $\underline{U} \in \mathbb{R}^n$  et où  $\underline{\underline{L}}(t)$  est une matrice réelle à coefficients périodiques de période  $T_e$  est appelée problème de Floquet. On montre que l'espace vectoriel des solutions complexes est engendré par  $n$  solutions de la forme  $\underline{\phi}_j(t) e^{s_j t}$  pour  $j = 1, \dots, n$  où les  $\underline{\phi}_j(t)$  sont des fonctions complexes périodiques de période  $T_e$  et les  $s_j$  des nombres complexes appelés exposants de Floquet.

La démonstration de ce résultat est simple en considérant la matrice  $\underline{\underline{R}}$  telle que  $\underline{U}(T_e) = \underline{\underline{R}} \underline{U}(0)$ . On peut construire numériquement cette matrice en intégrant le système dynamique linéaire de 0 à  $T_e$  à partir d'un ensemble de conditions initiales formant une base de  $\mathbb{R}^n$ . Si on note  $r_j$  pour  $j = 1, \dots, n$  les valeurs propres complexes de  $\underline{\underline{R}}$ , les coefficients de Floquet sont obtenus en posant  $s_j = \frac{1}{T_e} \text{Ln } r_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ . La propriété  $\underline{U}(t + T_e) = \underline{\underline{R}} \underline{U}(t)$  permet de conclure en construisant les fonctions  $\underline{\phi}_j(t)$  à partir des solutions intégrées entre 0 et  $T_e$  en prenant successivement les  $n$  vecteurs propres de  $\underline{\underline{R}}$  comme conditions initiales.

Même pour le cas simple du pendule paramétrique (on parle d'équations de Mathieu), la détermination analytique des exposants de Floquet fait l'objet de développements mathématiques complexes (déterminants infinis, ...). Dans l'espace de contrôle  $(\lambda, \frac{\omega}{\omega_e}, h)$ , on montre que l'équilibre se déstabilise principalement pour  $\omega/\omega_e \sim 1/2$ , sur un intervalle d'autant plus large que  $h$  est grand, à condition de dépasser une valeur critique d'autant plus grande que la dissipation  $\lambda$  est grande. En plus de la résonance paramétrique  $\omega/\omega_e \sim 1/2$ , on observe les résonances  $\omega/\omega_e \sim p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , mais sur des domaines de paramètres d'autant plus restreints que  $p$  est grand.

On peut effectuer un développement asymptotique lorsque l'intensité  $h$  du forçage, le coefficient  $\lambda$  de la dissipation et le detuning  $\delta = \omega^2/\omega_e^2 - 1/4$  sont petits. On suppose que  $h = \epsilon F$ ,  $\lambda = \epsilon \Lambda$  et  $\delta = \Delta \epsilon$

$$u(t) = \sqrt{\epsilon} \left[ u_0(t, \epsilon t) + \epsilon u_1(t, \epsilon t) + o(\epsilon^2) \right] \quad (4.46)$$

comme précédemment. À l'ordre dominant, on obtient  $u_0(t, T) = A(T)e^{i\omega_0 t} + A^*(T)e^{-i\omega_0 t}$  avec  $\omega_0 = \omega_e/2$ . La réponse rapide du pendule s'effectue donc à la pulsation moitié de celle du forçage, c'est-à-dire avec une période double. L'ordre suivant nécessite d'imposer une relation de compatibilité qui conduit à l'équation d'amplitude

$$\frac{dA}{dT} = (-\Lambda + i\nu)A + \mu \bar{A} - i\beta |A|^2 A \quad (4.47)$$

avec  $\nu = 2\Delta\omega_0$ ,  $\mu = \omega_0 F/4$  et  $\beta = \omega_0/4$ . L'étude de cette équation, en posant par exemple  $A = R \exp(i\theta)$ , permet de tracer le diagramme de stabilité dans le plan  $(\nu, F)$  pour différentes valeurs de  $\Lambda$ . L'instabilité est supercritique pour  $\nu > 0$  et sous-critique pour  $\nu < 0$ .

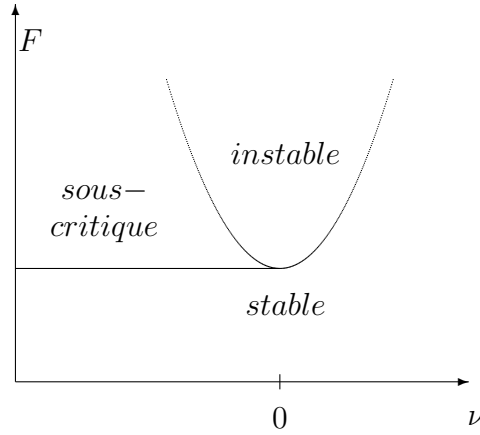


Figure 1: stabilité de l'équilibre du pendule paramétrique

## 4 Exploration numérique de système dynamiques

L'objectif de ce paragraphe est de motiver la programmation de systèmes dynamiques pour observer numériquement la richesse et l'universalité des comportements identifiés par l'approche théorique. Dans cet esprit, nous rappelons quelques méthodes numériques simples pour l'approximation des équations d'évolution. Nous énumérons ensuite une liste de systèmes dynamiques qui offre un large champ d'expérimentations numériques. Cette liste est complétée par les exercices et problèmes présentés à la fin.

### 4.1 Méthodes numériques simples

On considère un système d'équations différentielles ordinaires couplées de la forme

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}) \quad \text{où } \underline{X}(t) \in \mathbb{R}^N. \quad (4.48)$$

En notations indicées ce système s'écrit

$$\dot{X}_i = F_i(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.49)$$

On suppose que  $\underline{F}$  est différentiable. Le théorème de Cauchy indique alors qu'une condition initiale  $\underline{X}(0)$  donne naissance à une et une seule solution  $\underline{X}(t)$ .

On présente ici quelques schémas d'approximation des solutions de ces systèmes en discrétisant le temps en pas de temps égaux à  $\Delta t$ . On considère alors une

succession d'états  $\underline{X}^0, \underline{X}^1, \underline{X}^2, \dots, \underline{X}^n, \dots$  qui doivent approximer une solution  $\underline{X}(t)$  aux temps  $t_n = n \Delta t$ .

Le schéma d'**Euler** consiste à effectuer l'itération

$$\frac{\underline{X}^{n+1} - \underline{X}^n}{\Delta t} = \underline{F}(\underline{X}^n) \quad (4.50)$$

à partir de la condition initiale  $\underline{X}^0 = \underline{X}(0)$ .

Le schéma **Euler arrière** s'écrit

$$\frac{\underline{X}^{n+1} - \underline{X}^n}{\Delta t} = \underline{F}(\underline{X}^{n+1}) \quad (4.51)$$

et nécessite donc de résoudre une équation implicite pour  $\underline{X}^{n+1}$  à chaque pas de temps.

Le schéma **Leap-Frog** (saute-mouton) est défini par l'équation explicite

$$\frac{\underline{X}^{n+1} - \underline{X}^{n-1}}{2\Delta t} = \underline{F}(\underline{X}^n) \quad (4.52)$$

mais il fait intervenir les deux pas de temps précédant le nouveau pas de temps calculé. Il doit donc être initialisé avec un schéma à un pas de temps (par exemple Euler). Il est bon de savoir qu'il a tendance à découpler les pas de temps pairs et impairs, ce qui se traduit par des oscillations numériques que l'on peut éliminer en mélangeant, à intervalles réguliers ou systématiquement, les pas de temps pairs ou impairs.

Le schéma **Adams-Bashforth** fait lui aussi intervenir deux pas de temps, sans présenter le phénomène d'oscillation numériques du schéma précédent. Il s'écrit

$$\frac{\underline{X}^{n+1} - \underline{X}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}\underline{F}(\underline{X}^n) - \frac{1}{2}\underline{F}(\underline{X}^{n-1}). \quad (4.53)$$

Le schéma "**prédicteur-correcteur**" fait intervenir une étape intermédiaire issue du schéma d'Euler. Il s'écrit

$$\frac{\underline{X}^I - \underline{X}^n}{\Delta t} = \underline{F}(\underline{X}^n) \quad \text{et} \quad \frac{\underline{X}^{n+1} - \underline{X}^n}{\Delta t} = \underline{F}(\underline{X}^I). \quad (4.54)$$

Un schéma bien connu pour sa précision est le schéma de **Runge-Kutta** quatrième ordre qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\underline{X}^I - \underline{X}^n}{\Delta t} &= \underline{F}(\underline{X}^n) & \frac{\underline{X}^{II} - \underline{X}^n}{\Delta t/2} &= \underline{F}(\underline{X}^I) \\ \frac{\underline{X}^{III} - \underline{X}^n}{\Delta t/2} &= \underline{F}(\underline{X}^{II}) & \frac{\underline{X}^{IV} - \underline{X}^n}{\Delta t} &= \underline{F}(\underline{X}^{III}) \\ \underline{X}^{n+1} &= \underline{X}^n + \frac{\Delta t}{6} \left[ \underline{F}(\underline{X}^I) + 2\underline{F}(\underline{X}^{II}) + 2\underline{F}(\underline{X}^{III}) + \underline{F}(\underline{X}^{IV}) \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Notons que l'on peut combiner plusieurs de ces schémas pour une même équation. Si on décompose par exemple  $\underline{F}(\underline{X}) = \underline{A} \underline{X} + \underline{G}(\underline{X})$  où  $\underline{A}$  est un opérateur linéaire, le schéma “**Leap-Frog / Crank-Nicolson**” s'écrit

$$\frac{\underline{X}^{n+1} - \underline{X}^{n-1}}{2\Delta t} = \underline{A} \frac{\underline{X}^{n+1} + \underline{X}^{n-1}}{2} + \underline{G}(\underline{X}^n) \quad (4.56)$$

Tous ces schémas peuvent se mettre sous la forme  $\underline{X}^{n+1} = \underline{C}(\underline{X}^n, \underline{X}^{n-1}; \Delta t)$ , après avoir résolu les équations implicites lorsque c'est le cas. On peut alors rappeler sommairement les notions de consistance, stabilité et convergence d'un schéma.

Un schéma est **consistant** si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\underline{X}(t + \Delta t) - \underline{C}[\underline{X}(t), \underline{X}(t - \Delta t); \Delta t]\| = 0 \quad (4.57)$$

pour une solution  $\underline{X}(t)$ . Il est précis à l'ordre  $p$  si cette quantité tend vers zéro comme  $(\Delta t)^p$ .

Un schéma est **stable** si pour tout temps  $T$  il existe une borne supérieure  $M$  finie telle que  $\|\underline{X}^n\| < M$  pour tous les  $\Delta t$  et tous les  $n$  tels que  $n\Delta t \leq T$ .

Enfin, un schéma est **convergeant** si pour toutes les conditions initiales l'approximation  $\underline{X}^n$  converge vers la solution  $X(n\Delta t)$  quand  $\Delta t$  tend vers zéro et  $n$  vers l'infini avec  $t = n\Delta t$  fixé.

Le théorème de Lax indique que pour un problème bien posé et pour un schéma consistant, la stabilité est équivalente à la convergence.

On montre que les schémas d'Euler et Euler arrière sont précis au premier ordre, que les schémas de Crank-Nicolson, Leap-Frog et prédicteur correcteur sont précis au second ordre, et que le schéma de Runge-Kutta est précis au quatrième ordre.

L'analyse de la stabilité des schémas est du ressort de l'étude des systèmes dynamiques discrets, encore appelés “mappings”.

## 4.2 Le zoo des systèmes dynamiques continus

On présente ici plusieurs spécimens de systèmes dynamiques c'est-à-dire de systèmes d'équations différentielles ordinaires couplées. Ces exemples peuvent servir de champ expérimental pour des simulations numériques ainsi que d'illustration des concepts qui seront développés dans ce cours.

### Cage des formes normales

On présente ici quatre systèmes dynamiques à un degré de liberté, c'est-à-dire ne comprenant qu'une seule équation différentielle ordinaire d'ordre 1. Ces équations sont étudiées en détail dans le chapitre intitulé “Bifurcations génériques de l'équilibre”. Ce sont des formes normales dans la mesure où elles sont représentatives de bifurcations de l'équilibre observées dans des

systèmes dynamiques plus complexes pouvant avoir un grand nombre de degrés de liberté. La théorie des formes normales montrent qu'en effectuant un développement asymptotique au voisinage de la bifurcation on ramène la dynamique du système à celle de l'une ces formes normales.

1. Bifurcation noeud-col :  $x(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = \mu + \alpha x^2. \quad (4.58)$$

2. Bifurcation fourche :  $x(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3. \quad (4.59)$$

3. Bifurcation de Hopf :  $z(t) \in \mathcal{C}$

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z + (\alpha + i\beta)|z|^2 z. \quad (4.60)$$

4. Catastrophe en fonce :  $x(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = -q + p x - x^3. \quad (4.61)$$

#### Cage des vedettes du chaos

On présente maintenant deux systèmes dynamiques à trois degrés de liberté souvent utilisés pour illustrer le concept de chaos déterministe. En simulant numériquement ces systèmes pour certaines valeurs des paramètres de contrôle, on montre que le comportement des solutions est erratique, sensible aux conditions initiales et que les trajectoires simulées décrivent un ensemble que l'on appelle souvent "attracteur étrange". L'étude du premier exemple fera l'objet du chapitre "Modèle de Lorenz".

1. Modèle de Lorenz :  $\underline{X}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y && \text{avec } \sigma \geq 0 \\ \dot{y} &= -x z + r x - y && \text{avec } r \geq 0 \\ \dot{z} &= x y - b z && \text{avec } b \geq 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Le choix de Lorenz dans son article de 1963 est  $\sigma = 10$  et  $\beta = 8/3$ . Pour  $r$  suffisamment grand, ce système a un comportement chaotique.

2. Modèle de Rossler :  $\underline{X}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x \\ \dot{y} &= x + a y \\ \dot{z} &= b + x z - c z \end{aligned} \quad (4.63)$$

Un choix de paramètres conduisant à un comportement chaotique est  $a = b = 0.2$  et  $c = 5$ .

### Cage des oscillateurs

On présente un certain nombre de système dynamique exprimés sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 2. En posant  $v = \dot{u}$ , on se ramène à un système dynamique d'ordre 1 à deux degrés de libertés. Ces systèmes ont souvent un comportement oscillant, et décrivent donc des oscillateurs. Leur étude fait l'objet du chapitre intitulé "Oscillateurs".

1. Pendule simple :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + \omega^2 \sin u = 0 . \quad (4.64)$$

2. Oscillateur de Duffing :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \epsilon u^3 . \quad (4.65)$$

3. Pendule linéaire amorti :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 u = 0 . \quad (4.66)$$

4. Pendule tournant :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + (\omega_n^2 - \omega_e^2 \cos u) \sin u = 0 . \quad (4.67)$$

5. Pendule résonant :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega_n^2 \sin u = f \cos(\omega_e t) . \quad (4.68)$$

6. Oscillateur de Van der Pol :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + (k u^2 - 2\mu) \dot{u} + \omega_n^2 u = 0 . \quad (4.69)$$

7. Oscillateur forcé :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega_n^2 \sin u = f \cos(\omega_e t) . \quad (4.70)$$

8. Oscillateur paramétrique :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega_n^2 [1 + h \cos(\omega_e t)] \sin u = 0 . \quad (4.71)$$

## Conclusion

Plusieurs éléments de base dans l'étude des systèmes dynamiques ont été abordé à travers l'examen du modèle de Lorenz, du pendule simple et autres oscillateurs. La linéarisation de ces systèmes autour de leurs équilibre a été effectuée systématiquement. L'étude du système linéaire ainsi obtenu s'effectue à l'aide des vecteurs propres et valeurs propres de la matrice jacobienne. On obtient ainsi la stabilité de l'équilibre étudié ainsi que la topologie des trajectoires autour de cet équilibre.

Les changements de stabilité et de topologie des trajectoires obtenus en faisant varier un paramètre de contrôle sont appelés des bifurcations. Nous avons ainsi observé une "bifurcation fourche" lors de la déstabilisation de l'équilibre trivial du modèle de Lorenz et une "bifurcation de Hopf" pour la déstabilisation du repos dans l'oscillateur de Van der Pol. Ces bifurcations sont propres aux systèmes dissipatifs qui modélisent la compétition entre un forçage extérieur et une dissipation interne.

Les systèmes conservatifs modélisent des systèmes physiques isolés de tout forçage et pour lesquels on néglige la dissipation d'énergie. Les systèmes hamiltoniens forme une large classe de modèles conservatifs qui incluent les systèmes dépendant d'un potentiel et le pendule simple.

À travers les quelques exemples présentés, plusieurs concepts importants ont été rapidement abordés : sensibilité aux conditions initiales, phénomène de résonance, instabilité paramétrique, etc. Le calcul d'équations d'amplitude par la méthode des échelles a été rapidement esquissé sur deux exemples. Enfin, une initiation à l'exploration numérique des systèmes dynamiques a été effectuée.

Cette introduction est une invitation à approfondir l'étude des systèmes dynamique dont la compréhension est essentielles pour comprendre la dynamique de nombreux systèmes physiques, en particulier dans le cas des la mécanique des fluides.

## FORMULAIRE

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### **EXERCICE 4.1** Systèmes conservatifs

Tracer les portraits de phase des systèmes dynamiques suivants

- 1) Système 1 :  $\ddot{u} = -u(u^2 - 1)$ .
- 2) Système 2 :  $\ddot{u} = -(u - 1)(u - 2)(u - 3)$
- 3) Système 3 :  $\dot{x} = -x + 2y$       et       $\dot{y} = -x + y$ .

4) Système 4 :  $\dot{q} = 2pq/r - p^3/r^2$  et  $\dot{p} = 4p - p^2/r$ .

### **EXERCICE 4.2**    **Modèle de Rossler**

On considère le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = -y - z \quad (4.72)$$

$$\dot{y} = x - 3y \quad (4.73)$$

$$\dot{z} = -\mu + xz . \quad (4.74)$$

Ce système est un cas particulier du modèle de Rossler ( $a = -3$ ,  $b = -\mu$  et  $c = 0$ ) qui décrit la cinématique d'une réaction chimique entre des constituants dont les concentrations sont les quantités  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

- 1) Indiquer les ensembles que l'on appelle espace des phases et espace de contrôle pour ce système dynamique.
- 2) Calculer les points d'équilibre en fonction des valeurs des paramètres de contrôle.
- 3) Effectuer le calcul de stabilité pour le point d'équilibre correspondant au cas  $\mu = 0$ .
- 4) Tracer le portrait de phase (trajectoires) restreint au plan  $Oxy$  au voisinage de ce point d'équilibre pour  $\mu = 0$ .
- 5) Dans le cas général  $\mu \neq 0$ , montrer que la stabilité des points fixes est déterminée par les racines d'un polynôme de degré trois que l'on calculera.
- 6) Calculer les racines de ce polynôme lorsque l'une d'entre elles est nulle. Relier ce résultat avec l'une des questions précédentes.
- 7) Calculer la stabilité des équilibres dans un voisinage dans le voisinage de la valeur critique  $\mu = 0$ .
- 8) Indiquer la nature de la bifurcation observée et tracer son diagramme.
- 9) Le système dynamique est-il invariant par la symétrie point par rapport à  $O$  ? Relier cette réponse à la nature de la bifurcation.

### **PROBLÈME 4.3**    **Exemples de bifurcations**

#### **Bifurcations des systèmes dynamiques conservatifs**

- 1) Discuter, en fonction du paramètre de contrôle  $\mu$ , le comportement du système dynamique réel

$$\dot{x} = \mu x + y \quad (4.75)$$

$$\dot{y} = -x - \mu y . \quad (4.76)$$



Stabilité du point fixe (solution stationnaire), portraits de phases (tracés des trajectoires dans l'espace des phases), solutions analytiques, diagramme de bifurcation (illustrant les changements de dynamique en fonction du paramètre de contrôle), exposants critiques, etc. ...

- 2) Discuter le tracé de la famille de courbes définie par l'équation

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \mu pq = E \quad (4.77)$$

dans le plan réel  $(p, q)$  (relier cette question à la précédente).

### Bifurcations des systèmes dynamiques dissipatifs

Étudier les systèmes dynamiques suivants (stabilité des points fixes, portraits de phases, solutions analytiques, diagrammes de bifurcations, exposants critiques, brisure de symétrie, etc. ...) pour les valeurs du paramètre de contrôle  $\mu$  indiquées :

- 3) Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  voisin de  $\mu_c = 1$  :

$$\dot{x} = -2x + y \quad (4.78)$$

$$\dot{y} = -2 - xy + 2\mu y. \quad (4.79)$$

- 4) Pour  $A \in \mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  voisin de  $\mu_c = 0$  :

$$\ddot{A} + 3\ddot{A} + 2\dot{A} - 2\mu A + A^3 = 0. \quad (4.80)$$

- 5) Pour  $z \in \mathbb{C}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  :

$$\dot{z} = (\mu + i)z + (2 + i)|z|^2 z - (1 + 2i)|z|^4 z. \quad (4.81)$$

### **PROBLÈME 4.4** Transitions de phases : une analogie

On considère un milieu continu dont les variables d'état (pression, température, etc.) sont proches d'une transition de phase liquide-vapeur. Le but de ce problème est d'étudier un modèle unidimensionnel simple dont le comportement permet d'effectuer une analogie avec une telle transition de phase.



Figure 4.12: Transition de phase dans un milieu continu unidimensionnel.

Dans cette analogie, le milieu est contenu dans un tube fin d'axe  $Ox$  et le paramètre d'ordre réel  $A(x, t) \in \mathbb{R}$  de la transition obéit à l'équation aux

dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - \alpha A^3 - A^5 + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad (4.82)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$  dépend des variables d'état ainsi que  $\mu \in \mathbb{R}$  qui est proportionnel à l'écart à la température de liquéfaction. Dans ce modèle simple, on suppose que  $A = 0$  représente la phase liquide et que les solutions  $A \neq 0$  sont associées à la phase gazeuse.

### Transition du second ordre

On suppose ici que  $\alpha = 1$  et on s'intéresse uniquement aux solutions homogènes en espace de la forme  $A(x, t) = R(t)$ .

- 1) Montrer que  $R(t)$  est régi par un système dynamique

$$\dot{R} = F_+(R) \quad (4.83)$$

et donner l'expression de la fonction  $F_+$  qui dépend du paramètre  $\mu$ .

- 2) Tracer le diagramme de bifurcation de ce système dynamique en fonction du paramètre de contrôle  $\mu$ .  
 3) Commenter l'analogie avec une transition de phase du second ordre liquide-vapeur.

### Transition du premier ordre

On suppose maintenant que  $\alpha = -1$  et on note

$$\dot{R} = F_-(R) \quad (4.84)$$

le système dynamique régissant l'évolution des solutions homogènes d'espace  $A(x, t) = R(t)$ .

- 4) Tracer le diagramme de bifurcation de ce système dynamique en fonction du paramètre de contrôle  $\mu$ .  
 5) On réserve désormais le qualificatif de phase gazeuse aux valeurs de  $A$  proches d'une solution stationnaire  $R(t) = R_g \neq 0$  stable pour le système dynamique (4.84). Calculer la valeur  $\mu_*$  du paramètre  $\mu$  délimitant l'intervalle  $[\mu_*, 0]$  pour lequel la phase liquide  $R_l = 0$  et une phase gazeuse  $R_g \neq 0$  coexistent.  
 6) On s'intéresse maintenant aux solutions stationnaires  $A(x, t) = Q(x)$ . Montrer que le profil  $Q(x)$  est solution d'un système dynamique de la forme

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} = -V'(Q) \quad (4.85)$$

et donner l'expression du potentiel  $V$  en fonction de  $\mu$ .

- 7) Tracer les allures de la fonction  $V(Q)$  lorsque  $\mu$  varie, en particulier dans l'intervalle  $[\mu_*, 0]$ . On s'intéressera surtout à la comparaison des valeurs des extrema du potentiel  $V$ .
- 8) En déduire qu'il existe une valeur  $\mu_c \in [\mu_*, 0]$  du paramètre  $\mu$  pour laquelle la phase liquide et la phase gazeuse ont le même potentiel, et calculer  $\mu_c$ .
- 9) Tracer le portrait de phase du système dynamique (4.85) pour  $\mu = \mu_c$ . Commenter l'existence d'une trajectoire hétérocline  $Q_h(x)$  (i.e. reliant deux points fixes) entre la phase liquide ( $Q = R_l = 0$ ) et la phase gazeuse ( $Q = R_g \neq 0$ ) dans le cadre de l'analogie avec une transition de phase.
- 10) Dans le cadre de cette analogie on appelle "densité de potentiel thermodynamique" associée à  $A(x, t)$ , la fonction  $W[A(x, t)] = -V[A(x, t)] + \frac{1}{2}(\frac{\partial A}{\partial x})^2$ . De plus, on dit qu'une phase homogène stationnaire, c'est-à-dire  $A(x, t) = R_l$  ou  $A(x, t) = R_g$ , est "métastable" si elle est stable au regard des perturbations homogènes mais si son "potentiel thermodynamique"  $W(R) = -V(R)$  est plus élevé que le "potentiel thermodynamique" de l'autre phase qui est alors qualifiée de "phase stable". Reformuler le diagramme de bifurcation du système dynamique (4.84) en précisant cette fois la "stabilité" (trait plein), "métastabilité" (trait tireté) ou "instabilité" (trait pointillé) des différentes phases.

### Construction de Maxwell

On suppose toujours que  $\alpha = -1$ . On s'intéresse maintenant aux solutions de type front s'exprimant sous la forme  $A(x, t) = B(x - ct)$  où la constante  $c$  est la vitesse de propagation du front et où  $B(-\infty) = R_l = 0$ .

- 11) Montrer que  $B(y)$  est solution du système dynamique

$$\frac{d^2 B}{dy^2} + c \frac{dB}{dy} + V'(B) = 0 \quad (4.86)$$

et interpréter le paramètre  $c$  de ce système en terme de coefficient de frottement.

- 12) On suppose que  $\mu \in [\mu_*, \mu_c]$  est fixé et l'on fait varier  $c$  à partir de la valeur  $c = 0$ . Montrer qualitativement qu'il existe une valeur  $c = C(\mu)$  pour laquelle le système dynamique (4.86) admet une trajectoire hétérocline  $B_h(y)$  reliant la phase liquide  $B_h(-\infty) = R_l = 0$  à la phase gazeuse en  $B_h(+\infty) = R_g$ . Indiquer le signe de  $C(\mu)$  pour  $\mu \in [\mu_*, \mu_c]$ . Mêmes questions pour  $\mu \in [\mu_c, 0]$ .
- 13) En multipliant l'équation (4.86) par  $\frac{d}{dy} B_h(y)$  et en intégrant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , calculer  $C(\mu)$  en fonction de la différence de potentiel thermodynamique entre les phases liquide et gazeuse et du terme  $\int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{dB}{dy}(y)]^2 dy$ .

- 14) Dédurre de l'une des deux questions précédentes (ou des deux) qu'un front se propage toujours de la phase métastable vers la phase stable.
- 15) Commenter l'analogie entre la transition stable-métastable à  $\mu = \mu_c$  et une transition de phase liquide-vapeur du premier ordre.

### Point critique

On considère maintenant le cas général  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 16) Montrer que suivant le signe de  $\alpha$  on peut se ramener, par un changement de variable simple, au cas  $\alpha = 1$  (transition du second ordre) ou  $\alpha = -1$  (transition du premier ordre).
- 17) Montrer que le point  $(\mu, \alpha) = 0$  dans l'espace de contrôle de l'équation (4.82) peut être qualifié de point critique pour l'analogie avec la transition de phase liquide-vapeur.
- 18) Compléter éventuellement ce problème : exposants critiques des transitions, brisure de symétrie, formulation variationnelle de (4.82), fonctionnelle de Liapounov, ...

### PROBLÈME 4.5 Expérimentations numériques

Les systèmes dynamiques suivants complètent la liste des exemples mentionnés mentionnés dans le corps du texte. On pourra en faire l'étude de manière analytique (équilibres, stabilité, développements asymptotiques, ...) ainsi que numérique.

- 1) Oscillateurs de Lienard :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + (-\epsilon + r u^2) \dot{u} + (\omega_0^2 u + \rho u^3) = 0 \quad (4.87)$$

- 2) Oscillateur forcé :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + \omega_0^2 u = f + k u^2 \quad (4.88)$$

- 3) La boussole :  $u(t) \in \mathbb{R}$

$$\ddot{u} + \alpha \dot{u} + M \sin u - P \sin(u - t) = 0. \quad (4.89)$$

- 4) Équations de Volterra :  $\underline{X}(t) = [x(t), y(t)] \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x - \alpha x y \\ \dot{y} &= -\mu y + \alpha x y \end{aligned} \quad (4.90)$$

- 5) Équations de Volterra complexes :  $\underline{Z}(t) = [A(t), B(t)] \in \mathcal{C}^2$  et  $(\mu, \alpha, \beta) \in \mathcal{C}^3$

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \mu A + (\alpha |A|^2 + \beta |B|^2) A \\ \dot{B} &= \mu B + (\alpha |B|^2 + \beta |A|^2) B \end{aligned} \quad (4.91)$$

6) Calcul de forme normale :  $\underline{X}(t) = [A(t), B(t)] \in \mathbb{R}^2$  et  $(\mu, \lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \mu A + \alpha A B \\ \dot{B} &= -\lambda B + \beta A^2 \end{aligned} \quad (4.92)$$

7) Système hamiltonien “Todda Lattice” :  $(\underline{q}, \underline{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + \sum_{j=1}^n \exp(q_{j-1} - q_j) \quad (4.93)$$

8) Système hamiltonien “Hénon-Heiles” :  $(\underline{q}, \underline{p}) \in \mathbb{R}^4$

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \left( q_1^2 + q_2^2 + 2 q_1^2 q_2 - \frac{2}{3} q_2^3 \right) \quad (4.94)$$

9) Étudier l'équation d'amplitude

$$\frac{dA}{dt} = (-\Lambda + i\nu)A + \mu \bar{A} - i\beta |A|^2 A \quad (4.95)$$

et comparer avec l'équation du pendule paramétrique

$$\ddot{u} + \lambda \dot{u} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_e t)] u = 0. \quad (4.96)$$

dont elle est issue avec  $\nu = 2\Delta\omega_0$ ,  $\mu = \omega_0 H/4$ ,  $\beta = \omega_0/4$ ,  $\omega_0 = \omega_e/2$ ,  $\delta = \omega_n^2/\omega_e^2 - 1/4 = \epsilon\Delta$ ,  $\lambda = \epsilon\Lambda$ ,  $h = \epsilon H$  et

$$u(t) = \sqrt{\epsilon} \left[ A(\epsilon t) e^{i\omega_0 t} + \bar{A}(\epsilon t) e^{-i\omega_0 t} + O(\epsilon) \right]. \quad (4.97)$$

## CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

### QUESTIONNAIRES À CHOIX MULTIPLES

*En chantier*

### CORRIGÉS DES QCM

*En chantier*



## BIBLIOGRAPHIE DE L'APM

- [1] P. BERGÉ, Y. POMEAU, Ch. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Hermann (1984, 1988).
- [2] P. MANNEVILLE, *Structures dissipatives, chaos et turbulence*, Aléa Saclay (1991).
- [3] M. BENDER, S. A. ORSZAG, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, Mc Graw-Hill (1978).